

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف - دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم - ریاضی عمومی ۱

تاریخ: ۸۲/۱۰/۱۵

وقت: ۳¼ ساعت

• بارم سوالات از ۶۰ نمره است.

(۱) نمودار تابع $f(x) = e^x - \ln x$ (تعریف شده برای $x > 0$) را رسم کنید و خصوصاً نشان دهید
مینیمم مطلق تابع f در بازه $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2})$ رخ می‌دهد. (۱۰ نمره)

(۲) مقدار انتگرال $\int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} dx$ را با خطای کمتر از 10^{-8} محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

(۳) فرض کنید $b > 0$. مساحت ناحیه محصور بین محور x ها، خط واصل بین مبدأ و نقطه
 $(\sqrt{1+b^2}, b)$ و شاخه سمت راست هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را محاسبه نمایید. (۱۰ نمره)

(۴) ناحیه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ را بدست آورید و سپس مقدار سری را در هر نقطه از
ناحیه همگرایی محاسبه کنید. (۸ نمره)

(مقصود از ناحیه همگرایی، مجموعه همه نقاطی است که سری در آنها همگراست.)

(۵) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دو مرتبه مشتق پذیر است. اگر f رو به بالا باشد (f محدب باشد) و
 $f(0) = 0$ ، ثابت کنید برای هر $x > 0$ داریم $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{x} f(x)$ (۸ نمره)

(۶) الف) نشان دهید انتگرال ناسره $\int_1^{\infty} (\frac{1}{x} - \ln(1 + \frac{1}{x})) dx$ همگراست. (۳ نمره)

ب) نتیجه بگیرید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ که در آن $a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ همگراست. بعلاوه اگر
مجموع این سری برابر s باشد، نشان دهید $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$ (۵ نمره)

(۷) تابع $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است و $f'(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
نشان دهید f''' حداقل در یک نقطه صفر می‌شود. (۶ نمره)