

بسمه تعالی

تاریخ: ۸۱/۱۰/۱۷
وقت: ۳ ساعت

دانشگاه صنعتی شریف - دانشکده علوم ریاضی

امتحان نهایی ریاضی عمومی ۱ (گروههای ۹ الی ۱۲ و گروههای ۱۷ الی ۲۰)

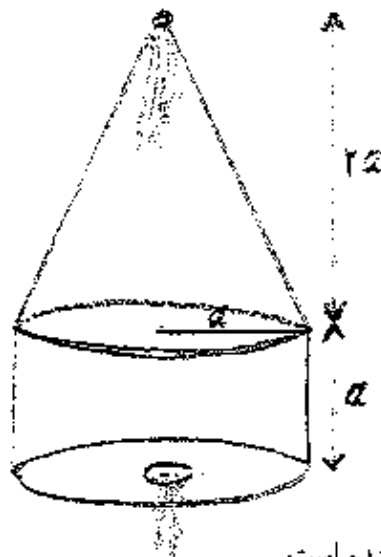
(۱) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) مقدار $f'(0)$ را محاسبه کنید.

ب) دلیل خود را برای وجود یا عدم وجود $f''(0)$ بیان کنید.

ج) با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا نقطه $x = 0$ ، نقطه ماکزیمم محلی یا مینیمم محلی یا نقطه عطف تابع f است یا خیر.

(۲)



یک مخروط به یک استوانه متصل شده است و ظرفی خالی مطابق شکل مقابل ساخته است. در لحظه $t = 0$ آب با سرعت ثابت به میزان ۶ لیتر در ثانیه از بالا وارد ظرف شده و به میزان ۲ لیتر در ثانیه از سوراخ پایین ظرف خارج می‌شود. در لحظه‌ای که ظرف پر آب می‌گردد جریان ورود آب قطع می‌شود. اگر در لحظه $t = 270$ (یعنی پس از 270 ثانیه) ظرف مجدداً خالی شود، اولاً مقدار h را محاسبه کنید و ثانیاً نمودار تقریبی تابع $h(t)$ را در حدی که داده‌های مساله اجازه می‌دهد رسم کنید. $h(t)$ ارتفاع آب را در داخل ظرف در لحظه t نشان می‌دهد. $(0 \leq t \leq 270)$.

(۳) تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ تعریف شده است.

مشتق اول و دوم تابع را محاسبه کنید و رفتار تابع را وقتی که $x \rightarrow 0^+$ و $x \rightarrow +\infty$ مشخص نمایید. با توجه به این موارد نمودار تابع را رسم کنید.

(۴) معادلات پارامتری یک منحنی به صورت $y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du$ و $x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} du$ داده شده است. $(t \geq 1)$

الف) نزدیکترین نقطه به مبدا مختصات که مماس بر منحنی در آن نقطه عمود بر محور xy است را تعیین کنید.

ب) طول منحنی را از $t = 1$ تا $t = \frac{\pi}{4}$ محاسبه کنید.