



پوست

با تعریف $a_n = \frac{1}{n - \ln n}$ که تمام جمله‌های مثبت آن نزولی خواهد بود. از طرفی

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n - \ln n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1 - \ln n/n}$$

در نتیجه بنابر آزمون سری‌های متناوب، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ همگرا می‌باشد.

حال سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ را در نظر می‌گیریم. چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1 - \ln n/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1 > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ واگراست. لذا بنابر آزمون تنبیه حدی، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ نیز واگراست. پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ همگرای شرطی می‌باشد. $\square$

سوال ۷:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+3)!} = \frac{1}{2V} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2V} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - 1 - 3 - \frac{9}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2V} (e^3 - \frac{17}{2})$$

$$= \frac{1}{54} (2e^3 - 17). \quad \square$$

$$\frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} = 1.$$

اکنون با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی اخیر به دست می‌آوریم

$$\sqrt{1+2F(x)} = x + C.$$

توجه می‌کنیم که $F(0) = 0$ و در نتیجه $C = 1$ پس

$$\sqrt{1+2F(x)} = x + 1,$$

$$\square \quad f(x) = x + 1.$$

سوال ۵: توجه می‌کنیم که برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

پس برای هر $x \neq 0$ در $\mathbb{R}$ داریم

$$\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - \dots$$

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \times 2!} + \frac{x^5}{5 \times 3!} - \frac{x^7}{7 \times 4!} + \frac{x^9}{9 \times 5!} - \dots \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2 \times 2!} + \frac{1}{5 \times 3!} - \frac{1}{7 \times 4!} + \frac{1}{9 \times 5!} - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{30} - \frac{1}{168} + \frac{1}{1080} - \dots$$

چون خطای حاصل در جمع چهار جمله اول سری متناوب کمتر از جمله پنجم یعنی کمتر از $1/1080$ است، لذا حاصل انتگرال داده شده با خطای مورد نظر، از جمع چهار جمله اول به دست می‌آید که برابر است با $\frac{241}{280} \approx 0.8607$. $\square$

سوال ۶: تابع $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$

تعریف می‌کنیم. f تابعی پیوسته است و برای هر $x \in [1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1-x}{x(x-\ln x)^2} \leq 0.$$

پس f روی $[1, +\infty)$ نزولی می‌باشد و لذا دنباله (a_n)