



سوال ۱: فرض کنید مستطیل دلخواهی مانند شکل رسم شده در برگه سوالات بر مستطیل مغرض با اضلاع a و b محیط شده است. در این صورت با توجه به شکل، اضلاع مستطیل دلخواه برابر است با

$$a \cos \theta + b \sin \theta,$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta.$$

و مساحت مستطیل دلخواه برابر خواهد بود با

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)(a \sin \theta + b \cos \theta) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 2\theta + ab.$$

در نتیجه مدل سازی سائو مورد نظر به زبان ریاضی می‌آید اگرکن
ماکزیمم مطلق تابع

$$\begin{cases} S: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \\ S(\theta) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 2\theta + ab \end{cases}$$

می‌باشد. اکنون با توجه به اینکه

$$S'(\theta) = (a^2 + b^2) \cos 2\theta$$

در $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ دارای ریشه $\frac{\pi}{4}$ است و با توجه به جدول

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
S'	+	0	-
S	ab	$\frac{1}{2}(a+b)^2$	ab

مقدار ماکزیمم مساحت به دست می‌آید که برابر $\frac{1}{2}(a+b)^2$ می‌باشد. $\square$

سوال ۲: چون تابع f بر $[a, b]$ مشتق پذیر است و $f(a) = f(b) = 0$

لذا بنابر قضیه رول نقطه c ، $0 < c < 1$ ، وجود است که $f'(c) = 0$.

از طرفی می‌توانست بدون f' و مقعر بودن f روی $[a, b]$ ايجاب می‌کند

که f' تابع نزولی بر $[a, b]$ است. پس برای هر $0 \leq x \leq c$

$$f'(x) \geq f'(c) = 0, \quad c \leq x \leq 1, \quad f'(x) \leq f'(c) = 0$$

در نتیجه روی $[c, 1]$ ، $|f'| = -f'$ و روی $[a, c]$ ، $|f'| = f'$

حال می‌توانیم بنویسیم

$$f = \int_a^1 \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$$

پیوست

$$\leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) \, dx$$

$$= 1 + \int_0^1 |f'(x)| \, dx$$

$$= 1 + \int_0^c |f'(x)| \, dx + \int_c^1 |f'(x)| \, dx$$

$$= 1 + \int_0^c f'(x) \, dx - \int_c^1 f'(x) \, dx$$

$$= 1 + (f(c) - f(0)) - (f(1) - f(c))$$

$$= 1 + f(c) + f(c)$$

$$\leq 3. \quad \square$$

سوال ۳: برای هر $A > 0$ ، با به کارگیری اشتراک گیری به روش زیر می‌توانیم

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin x}{x} \, dx &= \int_1^A \frac{1}{x} d(\sin x) \\ &= \left[\frac{\sin x}{x} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\sin x}{x^2} \, dx \\ &= \left(\frac{\sin A}{A} - \frac{\sin 1}{1} \right) + \int_1^A \frac{\sin x}{x^2} \, dx. \end{aligned}$$

واضح است که $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin A}{A} - \frac{\sin 1}{1} \right)$ وجود و برابر $-\frac{\sin 1}{1}$

می‌باشد. از طرفی چون $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ و $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

لذا بنابر آزمون مقایسه $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x^2} \, dx$ نیز وجود

است. پس

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{\sin A}{A} - \frac{\sin 1}{1} \right) + \int_1^A \frac{\sin x}{x^2} \, dx \right] = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} \, dx$$

نیز وجود است که همگرای $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ را ايجاب می‌کند. $\square$

سوال ۴: تابع $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$

تعریف می‌کنیم. بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، برای

هر $x \in [0, +\infty)$ ، $F'(x) = f(x)$ ، در نتیجه برابر هر $x \in [0, +\infty)$

$$(F'(x))^2 = 1 + 2F(x).$$

چون برای هر t ، $f(t) \geq 0$ ؛ لذا برای هر x ، $F(x) \geq 0$ و

در نتیجه برای هر x

$$F'(x) = \sqrt{1 + 2F(x)},$$