

سوال ۶ الف)

$$\int_1^b \left(\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) dx = \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x \right) dx = \left(\ln x - (x+1)\ln x + x \ln x \right) \Big|_1^b = \left(b+1 \right) \ln \frac{b}{b+1} + \frac{b^2}{b+1} - \frac{b^2}{b+1} - \ln 2$$

اگر $b \rightarrow +\infty$ داریم: $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(b+1 \right) \ln \frac{b}{b+1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{b+1} \right)^{b+1} \rightarrow \ln(e^{-1}) = -1$ پس انتگرال مگر است. (انته)

ب) اگر $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ برای $x \geq 1$ داریم $a_n = f(n)$ (هرانه) حال شرایط آزمون انتگرال را بررسی کنیم:

به وضوح f مثبت است و چون $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2+x^2} < 0$ پس f نزولی است و اگر $g(x) = x - \ln(x+1)$ برای $x \geq 1$ و

داریم $g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0$ پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ پس f (هرانه) مثبت است (هرانه) بنابراین از آزمون انتگرال

سری $\sum a_n$ مگر است (هرانه). اگر مجموع سری را S بنامیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ که S مجموع جزئی سری $\sum a_n$ است

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = 1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

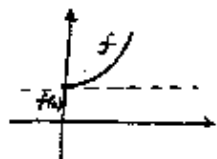
پس $S_n = 1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n - \ln n$ و چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = 0$ پس $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n) = S$ (هرانه)

سوال ۷

اگر f در هیچ نقطه منفرجه نباشد با توجه به پیوسته مقدارهای f در $[a, b]$ می توان فرض کرد $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

الف) اگر f در $[a, b]$ مقعر f رویه بالا است پس بالای خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ است و چون

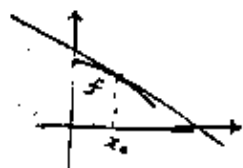
$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ پس f نامنفق است و لذا $f(x) > f(a)$ برای $x > a$ پس f منفرجه است



و چون $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ پس f نمی تواند بر محور x ها مماس شود. (انته)

ب) اگر f در $[a, b]$ مقعر f رویه پایین است پس f نزولی است و بنابراین اگر $f(a) < f(b)$ (کواه) باشد

$f(a) < f(b)$ پس f نزولی است و زیر خط مماس بر نمودار در $(a, f(a))$ واقع است



و بنابراین نمی تواند بر محور x ها مماس شود (نمی تواند مماس خود را قطع کند) (انته)