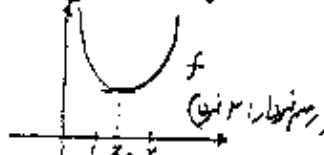


حل مشكلات پایان ترم - ریاضی عمومی ۱

سوال ۱: داریم $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ و $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$ (نمره ۲) و چون e^x پس صعودی است و لذا از آنجا که نقطه
مانند $f(x)$ صعودی است که $f'(x) = 0$ (نمره ۱) $f'(x) = 0 \iff e^x = -\frac{1}{x^2}$ (نمره ۱) $f'(x) = 0 \iff e^x = -\frac{1}{x^2}$ (نمره ۱) $f'(x) = 0 \iff e^x = -\frac{1}{x^2}$ (نمره ۱)
و چون f پیوسته است از خاصیت مقدار میانی برای f نقطه ξ که $f(\xi) = 0$ (نمره ۱) $f(\xi) = 0$ (نمره ۱) $f(\xi) = 0$ (نمره ۱)
 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ (نمره ۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ پس f هیچ مطلقاً ندارد نقطه ای از $(0, +\infty)$
رسمی دهد که در آن f صفر است پس نقطه مورد نظر ξ است (نمره ۳)

سوال ۲: با استفاده از بسط رولیه ای

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$ $|x| < 1$ (نمره ۲) $\Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$ $|x| < 1$ (نمره ۱)
 $\Rightarrow \int_0^t \sqrt{1+x^2} dx = t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 - \dots$ $|t| < 1$ (نمره ۲)
 $\Rightarrow I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{6} + \frac{(4)^3}{3} - \frac{(4)^5}{5} + \dots$ (نمره ۱)
سری افره متناوب و قدر مطلق آن نزولی و همگرا به صفر است و $\frac{(4)^3}{3} < \frac{(4)^5}{5}$ پس $I < \frac{(4)^3}{3} - \frac{(4)^5}{5} + \frac{(4)^7}{7} - \dots$ (نمره ۱)
خطای کمتر از $\frac{1}{1000}$ داریم $I \approx \frac{1}{6} + \frac{(4)^3}{3} - \frac{(4)^5}{5} = 0.1000135$ (نمره ۲)

سوال ۳: معادله قطبواصل مبدأ و نقطه $(\sqrt{1+b^2}, b)$ عبارتست از $x = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} y$ (نمره ۵)
 $A(b) = \int_0^b (\sqrt{1+y^2} - \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} y) dy$ (نمره ۲/۵)
 $\int \sqrt{1+y^2} dy \stackrel{y=\sinh u}{=} \int \cosh^2 u du = \int \frac{1+\cosh 2u}{2} du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sinh 2u = \frac{u}{2} + \frac{\sinh u \cosh u}{2}$ (نمره ۱/۵)
و چون $u = \sinh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ (نمره ۱) $y = \sinh u$ پس حاصل $\frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + \frac{1}{4} y \sqrt{1+y^2}$ است (نمره ۱)
 $A(b) = (\frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + \frac{1}{4} y \sqrt{1+y^2}) \Big|_0^b - \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{1}{2} \ln(b + \sqrt{1+b^2})$ (نمره ۳)

سوال ۴: با استفاده از آزمون نسبت یا ریشه n ام شعاع همگرا $R=1$ است و در ± 1 همگرایی $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ (نمره ۲)
ی رسمیم که همگرا هستند پس سری برای $|x| < 1$ همگراست. برای $|x| < 1$ داریم:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \stackrel{z=x}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x)$
پس $f(x) = (1-x) \ln \frac{1-x}{x} + 1$ مقدار سری برای $|x| < 1$ است. (نمره ۲) $x=0$ مقدار سری به صفر است
و در ± 1 با توجه به پیرنگی f مقادیر سری برای $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ و $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ به ترتیب $f(1)=1$ و $f(-1)=1-2 \ln 2$ هستند (نمره ۲)

سوال ۵: تابع $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با معادله $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x) - \int_0^x f(t) dt$ در نظر بگیرید (نمره ۲)

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'(x) + \frac{1}{x} f(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'(x) - \frac{1}{x} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'(x) - \frac{1}{x} (f(x) - f(0))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(x)}{x} - \frac{1}{x} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f'(x) - f'(0)) \quad (نمره ۳)$$

برای $x \geq 0$ با توجه به اینکه f نقره به بالا است $f'(x) \geq 0$ پس $h'(x) \geq 0$ و لذا h روی $(0, +\infty)$ صعودی است

و $\forall x \geq 0: h(x) \geq h(0) = 0$ که با سبب برای مورد نظر است (نمره ۳)