

مسئله ۶ : ۱۵ مهر

پیدا کردن V_1 و V_2 با روش انتگرال و تبدیل

$$V_1 = \int_0^b \pi x^2 dy \quad (2)$$

$$V_2 = \int_0^a \pi x y dx \quad (2)$$

که در آن $y = f(x)$ و $x = f^{-1}(y)$ باشد و چون f یک تابع معکوس پذیر و $x = f^{-1}(y)$ است پس با روش V_2 و V_1 را به هم تبدیل می کنیم

$$V_2 = \int_0^a \pi x f(x) dx = \pi x^2 f(x) \Big|_0^a - \pi \int_0^a x^2 f'(x) dx$$

$$= 0 + \pi \int_0^a x^2 f'(x) dx$$

با تغییر متغیر $y = f(x)$ در انتگرال می بینیم

$$= \pi \int_0^b x^2 dy = V_1 \quad (9)$$

مسئله ۷ : الف - برآیند تابع $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} \right| = |x|$$

بر $|x| < 1$ است $\Rightarrow$ نقطه $x = \pm 1$ سرریز است پس فاصله $(1, -1)$ می باشد

$$(1, -1) \text{ می باشد} \quad (2)$$

ب - در داخل فاصله $(1, -1)$ سری را می توانیم به صورت یک تابع نامتناهی در آوریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad ; |x| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad ; |x| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad ; |x| < 1 \quad (7)$$

پس $x = -\frac{1}{3}$ را در سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ قرار می دهیم و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{3}{32} \quad (3)$$