

تاریخ: ۸۴/۱۰/۱۸

بسمه تعالی

(۱) ثابت کنید فاصله همگرایی سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ برابر $\mathbb{R}$ است و بعلاوه اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ آنگاه $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$.

(۲) فاصله همگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید:

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n x^n$

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^n (3x - 1)^n$

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+1}{x} \right)^n$

(۳) مقدار $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$ را محاسبه نمایید.

(راهنمایی: سری مک‌لورن $\frac{1}{x}(x \cos x - \sin x)$ را بنویسید)

(۴) فرض کنید $f(x)$ روی (a, b) مشتق پذیر بوده و $f(a) = 0$ و وجود داشته باشد ثابت $c \geq 0$ به طوری که برای هر $x \in [a, b]$ ، $|f'(x)| \leq c|f(x)|$. ثابت کنید $f(x) \equiv 0$.

(راهنمایی: فرض کنید وجود دارد x_1 که مثلاً $f(x_1) > 0$. در این صورت وجود دارد فاصله (α, β) که به ازای هر $x \in (\alpha, \beta)$ ، $f(x) > 0$. حال از قضیه میانگین برای $\ln(f(x))$ استفاده نمایید)

(۵) با استفاده از قضیه میانگین تعمیم یافته ثابت کنید:

۱) $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x$ $x \neq 0$

۲) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x$ $x \neq 0$

۳) $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $x > 0$

(راهنمایی: برای قسمت (۱) قرار دهید $f(x) = 1 - \cos x$ و $g(x) = \frac{x^2}{2}$ و برای قسمت (۲) قرار دهید $f(x) = x - \sin x$ و $g(x) = \frac{x^3}{3!}$).

(۶) اگر $f(x)$ روی $(0, \infty)$ مشتق پذیر باشد و $a > 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (af(x) + f'(x)) = L$$

در این صورت ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{L}{a}.$$

(راهنمایی: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax} f(x)}{e^{ax}}$ حال از هوییتال استفاده کنید).

(۷) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} (af(x) + 2\sqrt{x}f'(x)) = L$ و $a > 0$ ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{L}{a}$.

(۸) فرض کنید f, g روی $[a, b]$ پیوسته باشند و روی $[a, b]$ ، $g(x) > 0$. ثابت کنید وجود دارد $c \in (a, b)$ به طوری که $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$.

(۹) فرض کنید $f(x)$ روی $[a, b]$ دوبار مشتق پذیر باشد و حداقل سه ریشه متمایز در $[a, b]$ داشته باشد. ثابت کنید معادله $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ حداقل یک جواب در فاصله $[a, b]$ دارد.

(راهنمایی: تابع $e^{-x}f(x)$ را در نظر گرفته و با استفاده از قضیه رُل نشان دهید $e^{-x}(f'(x) - f(x)) = 0$ دارای حداقل ۲ ریشه متمایز است حال مشتق دوم این تابع حکم را نتیجه می دهد).