

حل مسائل امتحان میان ترم دوم ریاضی عمومی ۱

سوال ۱:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2 - i^2}$$
 حد مطلوب

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2 - i^2} \right) \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2 - x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+2x+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+1} \right| \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \square$$

سوال ۲: با تقسیم صورت تابع زیر انتگرال بر مخرج آن می توانیم بنویسیم:

الکون با فرض
$$x^5 - x^2 + x - 1 = (x+1) + \frac{x^5 - x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

به دست می آوریم $A = -1, B = 1, C = -2, D = 0, E = 0, F = 1$

دس

انتگرال مطلوب
$$= \int \left(x+1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{1}{x^2+1} + \tan^{-1} x + C \quad \square$$

سوال ۳: حجم حاصل از دوران برابر است با

$$2\pi \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 8}} x \sqrt{1+e^{x^2}} dx$$

با فرض $u = \sqrt{1+e^{x^2}}$ به دست می آوریم $x dx = \frac{u du}{u^2-1}$

ولذا حجم مطلوب برابر خواهد بود با

$$2\pi \int_2^3 \frac{u^2}{u^2-1} du$$

$$= 2\pi \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= 2\pi \left(u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \Big|_2^3$$

$$= 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} \right) \quad \square$$

سوال ۴: می توانیم بنویسیم:
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5x} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5x}$$

برای $\epsilon > 0$ داده شده، اگر $\epsilon \leq x \leq 1$ آنگاه $\frac{1}{6x} < \frac{1}{x^2+5x} < \frac{1}{x}$ و

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x} < \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{6x} = +\infty$$

لذا $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x} > \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{6x}$ اما $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{6x} = +\infty$ در نتیجه $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x} = +\infty$

و اگر است که و اگر ای انتگرال داده شده را به دست می دهیم. $\square$

سوال ۵: تابعی مستقیم با مستقیم پیوسته است و لذا می توانیم انتگرال گیری به روش جزء به جزء را به کار گیریم:

$$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x dF(x) = x F(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 F(x) dx = F(1) - \int_0^1 F(x) dx$$

الکون قضیه مقدار میانگین برای انتگرال نتیجه می دهد که نقطه c که $0 \leq c \leq 1$ موجود است که $\int_0^1 x f(x) dx = F(1) - F(c)$ و لذا $\int_0^1 F(x) dx = (1-0)F(c) = F(c)$ $\square$

سوال ۶: الف) فرض کنیم $x \in (a, b)$ موجود باشد که $f(x) > 0$ در

نتیجه پیوستگی f ایجاب می کند که $\delta > 0$ موجود است که $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ و f روی $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ مثبت است. از طرفی f روی بازه بسته $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ پیوسته است و در نقطه ای چون c به خود می گردد. حال افراز $P = \{x_0 - \delta, x_0, x_0 + \delta\}$ را از $[a, b]$ در نظر می گیریم. در نتیجه

$$0 = \int_0^1 f(x) dx \geq L(P, f) \geq f(c)(x_0 + \delta - x_0 - \delta) > 0$$

که تناقض است. پس برای هر $x \in (a, b)$ $f(x) = 0$ و چون f بر

$[a, b]$ پیوسته است، لذا $f = 0$ روی $[a, b]$. $\square$

ب) فرض کنیم چنین تابع f موجود باشد. می توانیم بنویسیم:

$$\int_0^1 (x-k)^2 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 f(x) - 2kx f(x) + k^2 f(x)) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2k \int_0^1 x f(x) dx + k^2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$= k^2 - 2k^2 + k^2 = 0$$

چون برای هر $x \in [a, b]$ $(x-k)^2 f(x) \geq 0$ ، لذا (الف) نتیجه می دهیم

که برای هر $x \in [a, b]$ $(x-k)^2 f(x) = 0$ یا $f(x) = 0$. در نتیجه

$\int_0^1 f(x) dx = 0$ که تناقض است. پس چنین تابع f

وجود ندارد. $\square$