



حل سایل امتحان میان ترم اول ریاضی عمومی ۱

سؤال ۱: محورهای مختصات را طوری قرار می دهیم که مبدأ مختصات

بر مرکز دایره منطبق شود و ریشه های n ام واحد بر رؤوس n

ضلع منظم. پس می توانیم فرض کنیم $A_j = \omega^j$ ($0 \leq j \leq n-1$)

که در آن ω ریشه n ام اصلی واحد است، یعنی $\omega = e^{2\pi i/n}$

و $P = z$ که z نقطه ای دلخواه روی دایره است. در نتیجه با توجه به

اینکه مجموع ریشه های n ام واحد برابر صفر است می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |PA_j|^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} |z - \omega^j|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (z - \omega^j)(\bar{z} - \bar{\omega}^j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (1 - z\bar{\omega}^j - \bar{z}\omega^j + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 2 - z \left(\sum_{j=0}^{n-1} \bar{\omega}^j \right) - \bar{z} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^j \right) \\ &= 2n - 0 - 0 \\ &= 2n. \quad \square \end{aligned}$$

سؤال ۲: چون f روی $[a, b]$ پیوسته است و $f(0) < \frac{1}{2} < f(1)$

پس بنا بر قضیه مقدار میانی نقطه c ، $0 < c < 1$ ، موجود است که

$f(c) = \frac{1}{2}$ (توجه کنید که حالت $c=0$ یا $c=1$ نمی تواند رخ دهد).

الئون با توجه به اینکه f روی بازه های $[0, c]$ و $[c, 1]$ پیوسته

و در هر نقطه دومی از این بازه ها مشتق پذیر است، می توانیم

روی هر کدام از این بازه ها قضیه مقدار میانگین را به کار گیریم.

در نتیجه نقاط x_1 و x_2 ، $0 < x_1 < c$ و $c < x_2 < 1$ ، به

دست می آیند که

$$f'(x_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1}{rc},$$

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1}{r - rc}.$$

پس $0 < x_1 < x_2 < 1$ و

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} &= rc + r - rc \\ &= r. \quad \square \end{aligned}$$

سؤال ۳: حجم هرم برابر است با

$$\frac{1}{3} \times (\text{ارتفاع}) \times (\text{مساحت قاعده}).$$

به ازای هر هرم داده شده در سؤال می توانیم رأس هرم را روی

صفحه ای که موازی قاعده هرم است و رأس روی آن قرار

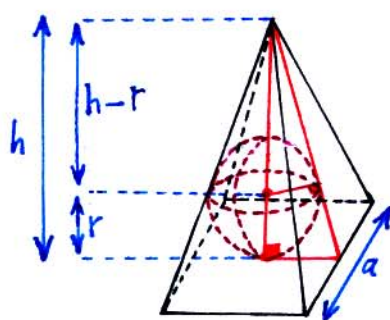
دارد حرکت دهیم تا یک هرم قائم به دست آوریم که حجم آن به

دلیل تغییر نکردن ارتفاع، با حجم هرم داده شده مساوی است.

پس بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می توانیم تمام

هرم های داده شده در سؤال را قائم فرض کنیم.

فرض کنید هرم قائم زیر، هرم دلخواهی باشد.



از شبیه سیمک ها به دست می آوریم: $\frac{r}{a/2} = \frac{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}{h}$

در نتیجه $a^2 = 4r^2 \frac{h^2}{h^2 - r^2}$. پس حجم هرم مذکور برابر است با

$$\frac{4}{3} r^2 \frac{h^2}{h^2 - r^2}.$$

در نتیجه مدل سازی مسئله به زبان ریاضی به این شکل می آید:

مطلوب تابع



سوال ۵: تابع $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(t) = \int_1^t \frac{dx}{x}$ تعریف می‌کنیم. بنا بر قضیه اساسی حساب ریزانسیل، مشتق $f'(t) = \frac{1}{t} > 0$ و در نتیجه f روی $[1, +\infty)$ اکیده صعودی است. در نتیجه برای $a, b \geq 1$ ، $a > b$ معادل است با اینکه $f(a) > f(b)$. پس حکم مسئله زیر معادل است با اینکه $f(2) < f(e) < f(3)$. پس کافی است ثابت کنیم $\int_1^{2.5} \frac{dx}{x} < 1 < \int_1^3 \frac{dx}{x}$.

(الف) اثبات درستی $\int_1^{2.5} \frac{dx}{x} < 1$
افزاینده $P = \{x_0, x_1, \dots, x_6\}$ از $[1, 2.5]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:
 $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75, x_4 = 2, x_5 = 2.25, x_6 = 2.5$.
برای این افزایش داریم $\Delta x_i = 0.25$ و در نتیجه

$$U(P, f) = \left(1 + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.25} + \frac{1}{2.5}\right) \times 0.25 \\ < (1 + 0.8 + 0.667 + 0.571 + 0.5 + 0.444) \times 0.25 \\ = 0.999 \\ < 1.$$

در نتیجه $\int_1^{2.5} \frac{dx}{x} \leq U(P, f) < 1$
(ب) اثبات درستی $\int_1^3 \frac{dx}{x} > 1$

افزاینده $P = \{x_0, x_1, \dots, x_8\}$ از $[1, 3]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:
 $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75, x_4 = 2, x_5 = 2.25, x_6 = 2.5, x_7 = 2.75, x_8 = 3$.

برای این افزایش داریم $\Delta x_i = 0.25$ و در نتیجه

$$L(P, f) = \left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.25} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.75} + \frac{1}{3}\right) \times 0.25 \\ > (0.8 + 0.667 + 0.571 + 0.5 + 0.444 + 0.4 + 0.364 + 0.333) \times 0.25 \\ = 1.015 \\ > 1.$$

در نتیجه $\int_1^3 \frac{dx}{x} \geq L(P, f) > 1$ □

$$\begin{cases} V: (2r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ V(h) = \frac{\varepsilon}{3} r^2 \frac{h^2}{h-2r} \end{cases}$$

می باشد. با توجه به اینکه

$$V'(h) = \frac{\varepsilon}{3} r^2 \frac{h^2 - 2rh}{(h-2r)^2},$$

جدول زیر را به دست می‌آوریم:

h	2r	4r	+	∞
V'(h)	0	+	+	+
V(h)	+	0	+	+

در نتیجه به ازای (قطر کره) $h = 4r = 2 \times$ حجم منبسط به دست می‌آید. □

سوال ۶: با توجه به اینکه $f''(a) = 0$ ، چند جمله‌ای تیلور درجه ۳ تابع f حول نقطه a ، با احتساب خطا، $f(x)$ را به صورت زیر به دست

می‌دهد:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-a)^4,$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و x است. در نتیجه برای عدد حقیقی دلخواه h

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(c_1) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(c_2),$$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(c_3) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(c_4),$$

که در آن c_1 نقطه‌ای بین a و $a+h$ و c_2 نقطه‌ای بین a و $a-h$ است. از جمع تساوی‌های بالا به دست می‌آوریم

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = \frac{h^4}{24} (f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2)).$$

$$\begin{aligned} |f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)| &= \frac{h^4}{24} |f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2)| \\ &\leq \frac{h^4}{24} (|f^{(4)}(c_1)| + |f^{(4)}(c_2)|) \\ &\leq \frac{h^4}{24} (2M) \\ &= \frac{M}{12} h^4. \quad \square \end{aligned}$$