

تقریب خطی

از بدو بررسی مشتق دیدیم که از میان همه خطوط راستی که از یک نقطه نمودار یک تابع مشتق پذیر می گذرند، خط مماس به معنایی "نزدیکترین" این خطوط به نمودار تابع است. به طور دقیق، برای نقاط نزدیک نقطه داده شده، تفاضل مقدار y روی نمودار و روی خط مماس آنقدر کوچک است که این تفاضل به سرعت مضاعف (مانند $\Delta x \phi(\Delta x)$) به صفر میل می کند. طبیعی است که کوشش کنیم از این نزدیکی برای تقریب مقدار تابع استفاده کنیم چه محاسبه y برای خط راست که معادله درجه یک دارد کاری بسیار ساده است. اگر تابع f در نقطه درونی a از دامنه خود مشتق پذیر باشد، تقریب زدن مقدار f در نزدیکی a را به صورت زیر نمایش می دهیم

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h \quad (1)$$

با نوشتن $h = \Delta x$ و $f(a+h) - f(a) = \Delta y$ ، (۱) به صورت

$$\Delta y \simeq f'(a)\Delta x \quad (2)$$

نیز نوشته می شود. به نماد لایب نیتس، این تساوی تقریبی نمو متغیر تقریب خطی، یعنی dx ، را به اندازه Δx بگیریم، (۲) به صورت زیر در می آید

$$Dy \simeq dy \quad (3)$$

در نوشتگان گوناگون ممکن است به هریک از سه صورت بالا برخورد کنید، که همه یک معنی دارند. چند مثال محاسباتی ارائه می کنیم.

مثال ۱. مقداری تقریبی برای $\sqrt[3]{1/0.12}$ ارائه کنید.

در این نوع مسایل باید تابعی مناسب محاسبه مورد نظر ارائه کنیم، مثلاً در اینجا $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، عددی a ، نزدیک متغیر مورد محاسبه که برای آن محاسبه تابع، یعنی $f(a)$ ، ساده باشد، در اینجا $a = 1$ ، و بالاخره h را برابر تفاضل عدد داده شده و عدد a بگیریم، در اینجا $h = 0.12$. بدین ترتیب تقریب (۱) در اینجا به شکل زیر در می آید

$$\sqrt[3]{1/0.12} \simeq \sqrt[3]{1} + f'(1) \cdot (0.12)$$

با مشتق گیری از $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ داریم $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ، پس $f'(1) = \frac{1}{3}$ و داریم

$$\sqrt[3]{1/0.12} \simeq 1 + \left(\frac{1}{3}\right)(0.12) = 1/0.04$$

مثال ۲. گفته می شود که برای مقادیر کوچک $|\theta|$ ، برحسب رادیان، $\sin \theta \simeq \theta$. نشان می دهیم مبنای این ادعا، تقریب خطی است. می نویسیم $f(x) = \sin x$ ، پس $f'(x) = \cos x$ و $a = 0$ ، پس $f(a) = 0$ و $f'(a) = 1$. بنابراین با قراردادن θ به جای h در (۱) داریم

$$\sin \theta \simeq 0 + 1 \cdot \theta = \theta$$

مثال ۳. ظرف قیف شکل طبق شکل ۱ را در نظر می گیریم که ارتفاع آن ۲۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۱۰ سانتی متر است و طوری قرار گرفته که رأس آن در پایین و محور مخروط در راستای قائم قرار دارد. مقداری آب در این ظرف ریخته شده است و ارتفاع آب از رأس قیف برابر ۶ سانتی متر با خطای ممکن ± 0.1 سانتی متر اندازه گیری شده است. اگر حجم آب موجود در این ظرف را براساس ارتفاع اندازه گیری شده محاسبه کنیم، خطای ممکن در محاسبه حجم حداکثر چه قدر است؟

اگر ارتفاع سطح آب را به h و شعاع سطح آب را به r نمایش دهیم، از تشابه مثلث ها داریم $r = \frac{h}{3}$. حال اگر حجم آب را به V نمایش دهیم، داریم

$$V = \frac{\pi}{3} h^3$$

با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود که

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4} h^2$$

با استفاده از (۲) داریم

$$\Delta V \simeq \left(\frac{\pi}{4}(6^2)\right)\Delta h = (9\pi)(\Delta h)$$

خطای محاسبه ارتفاع سطح آب ± 0.1 سانتی‌متر فرض شده است، یعنی $|\Delta h| \leq 0.1$ ، بنابراین $|\Delta V|$ حدوداً از $\frac{9}{4}\pi$ یعنی حدوداً 2.83 سانتی‌متر مکعب کوچکتر است.

مثال‌های بالا را باید از نظر علمی بدوی تلقی کرد زیرا که در کاربردهای مختلف درجه دقت‌های متفاوت مورد نظر است و تقریبی که در یک کاربرد پذیرفتنی است در کاربردی دیگر ممکن است منجر به خطاهای غیرقابل قبول شود. برای هر روش تقریب باید قاعده‌ای عملی برای تخمین حدود خطا نیز ارائه شود که به کمک آن بتوانیم به یک ارزیابی در مورد قابل قبول بودن روش تقریب دست یابیم. در مورد تقریب خطی به زودی به چنین روشی برای تخمین خطای دست خواهیم یافت ولی در حال حاضر موضوع "خطای نسبی" را مطرح می‌کنیم که از عملی اغلب ضابطه‌ای سودمندتر از خطای مطلق است. به طور کلی، خطای نسبی برابر نسبت خطا به مقدار واقعی تعریف می‌شود. بدین ترتیب اگر نمودار کوچک متغیر، یعنی Δx ، را به عنوان خطا در اندازه‌گیری مقدار x متغیر فرض کنیم، خطای نسبی $\frac{\Delta x}{x}$ خواهد بود، و نیز خطای نسبی متناظر برای مقدار تابع، $\frac{\Delta y}{y}$ می‌شود.

مثال ۴. در مثال ۳ بالا، اگر ارتفاع آب ۶ سانتی‌متر با خطای نسبی حداکثر یک درصد اندازه‌گیری شده باشد، حداکثر خطای نسبی حاصل در محاسبه حجم متناظر چیست؟

در اینجا داریم $\left|\frac{\Delta h}{h}\right| \leq \frac{1}{100}$ و می‌خواهیم کران بالایی برای $\left|\frac{\Delta V}{V}\right|$ به دست آوریم. داشتیم

$$\Delta V \simeq f'(a)\Delta h$$

با تقسیم کردن بر V نتیجه می‌شود

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \left(\frac{\pi}{4}h^2\right)\frac{\Delta h}{\frac{\pi}{4}h^3} = 3\frac{\Delta h}{h}$$

بنابراین $\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \leq \frac{3}{100}$ ، یعنی خطای نسبی متناظر در محاسبه حجم حداکثر ۳ درصد است.

مثال ۵. مثال بالا را می‌توان به این صورت تعمیم داد. فرض کنید $y = kx^n$ که در آن k ثابت است. اگر محاسبه یا اندازه‌گیری x حداکثر خطای نسبی r درصد باشد، حداکثر خطای نسبی در محاسبه y چیست؟

داریم $\frac{dy}{dx} = nkx^{n-1}$ ، پس

$$\Delta y \simeq nkx^{n-1} \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{nkx^{n-1}}{kx^n} \Delta x = n \frac{\Delta x}{x}$$

بدین ترتیب اگر کمیت y متناسب با توان n کمیت x باشد خطای نسبی در y حدوداً n برابر خطای نسبی در x خواهد بود. به یک مثال آشنا در این زمینه توجه کنید. مربعی به ضلع a با خطای $\pm h$ داده شده است. می‌خواهیم خطای احتمالی حادث در محاسبه مساحت مربع را تخمین بزنیم. داریم

$$(a \pm h)^2 - a^2 = \pm 2ah + h^2$$

اگر h کوچک باشد، h^2 در مقایسه بسیار کوچکتر است و معمولاً "قابل صرف نظر" تلقی می‌شود. h^2 برابر مساحت گوشه کوچک هاشورزده در شکل ۲ است. بنابراین داریم

$$(a \pm h)^2 - a^2 \simeq \pm 2ah$$

این دقیقاً برابر نتیجه‌ای است که از تقریب خطی تابع $f(x) = x^2$ حاصل می‌شود، با تقسیم بر a^2 نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\frac{(a \pm h)^2 - a^2}{a^2} \simeq \pm 2 \frac{h}{a}$$

در اینجا $\frac{h}{a}$ خطای نسبی در محاسبه طول ضلع مربع است و طرف چپ خطای نسبی در محاسبه مساحت مربع.

اکنون به بررسی تخمین خطا در تقریب خطی می‌پردازیم. چهار نمونه تقریب خطی در نمودارهای شکل ۳ را در نظر بگیرید.

در همه موارد به وضوح مشاهده می‌شود که هر چه $|h|$ کوچکتر باشد، فاصله بین خط مماس و نمودار تابع کوچکتر است. تفاوت دیگری که میان شکل‌های (الف) و (ب) از یک سو با (ج) و (د) در سوی دیگر وجود دارد این است که با رشد $|h|$ در شکل‌های (الف) و (ب)، میزان خطا، یعنی اختلاف مقدار y میان نمودار تابع و تقریب خطی، به شدت افزایش می‌یابد در حالی که در شکل‌های (ج) و (د)، نمو خطا به نسبت کندتر است. در (ج) و (د) نمودار تا فاصله زیادی نسبت $(a, f(a))$ نزدیک به خط راست می‌ماند در حالی که در (الف) و (ب)، انحراف نمودار از "راست بودن" بسیار شدید است. چگونه می‌توان این تفاوت را به صورت ریاضی صورت‌بندی کرد؟ اگر فرض کنیم تابع f در سراسر دامنه، یا دست‌کم در بازه‌ای حول a ، مشتق‌پذیر است، یعنی خط مماس بر تابع در همه نقاط نمودار یا دست‌کم نقاط نزدیک به $(a, f(a))$ وجود دارد، آنگاه مشاهده می‌کنیم که شیب مماس در شکل‌های (الف) و (ب) سریعاً تغییر می‌کند در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) شیب مماس آهنگ تغییر کندی دارد. ولی شیب مماس برابر مشتق تابع است، پس در شکل‌های (الف) و (ب) آهنگ تغییر مشتق تابع در قدر مطلق بزرگ است، در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) آهنگ تغییر مشتق کند می‌باشد. بنابراین اگر مشتق تابع f ، یعنی f' ، را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم، و اگر این تابع خود مشتق‌پذیر باشد، از آنجا که آهنگ تغییر به وسیله مشتق سنجیده می‌شود، اندازه مشتق f' باید نشان‌دهنده شدت انحراف نمودار از یک خط راست باشد، مشتق f' را که به f'' نمایش می‌دهند، "مشتق دوم f " می‌نامند. در زیر تعریف دقیق را بررسی می‌کنیم:

(۱۷-۱) $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است و f در نقاط زیرمجموعه‌ای S' از S مشتق‌پذیر است، یعنی $f': S' \rightarrow \mathbb{R}$ ، تعریف شده است. برای نقطه درونی a از S' ، اگر مشتق f' در نقطه a وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم f در نقطه a خوانده و به $f''(a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر بنویسیم $y = f(x)$ ، در نمادگذاری لایب‌نیتس، $f''(x)$ به $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ یا اختصاراً $\frac{d^2y}{dx^2}$ نمایش داده می‌شود.

اکنون می‌توانیم به کمک مشتق دوم f ، تخمینی برای خطای تقریب خطی ارائه کنیم.

(۱۷-۲) (تخمین خطای تقریب خطی) فرض کنید تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ در یک بازه باز شامل نقطه

درونی a از S دارای مشتق‌های مرتبه اول و دوم است. در این صورت اگر نقطه $a + h$ در این بازه باشد داریم

$$f(a + h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{1}{2} f''(c) h^2 \quad (4)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a + h$ است.

توجه کنید که این حکم با انتظارات ما سازگار است. از یک طرف هر قدر $|h|$ کوچکتر باشد، خطای منتظره کوچکتر است (در واقع طرف راست (4) با مجذور h متناسب است و از طرفی دیگر اندازه مشتق دوم بین a و $a + h$ می‌تواند بر مقدار خطا اثر بگذارد. ظهور مجذور h بدین معنی است که در مبنای عددنویسی اعشاری اگر اندازه‌گیری a یک رقم اعشار دقیق‌تر شود، می‌توان انتظار داشت که خطای محاسبه تا دو رقم اعشار کاهش یابد زیرا اگر به جای h از $\frac{h}{10}$ استفاده کنیم، طرف راست (4) بر 100 تقسیم خواهد شد. در اثبات 17-2 خواهیم دید که این حکم در واقع همتای قضیه میانگین برای تابع‌های دوبار مشتق‌پذیر است. در واقع اثبات ما به تبعیت از اثبات قضیه میانگین با ارائه همتایی از قضیه رل شروع خواهد شد.

(17-3) (همتای قضیه رل برای مشتق دوم) I یک بازه باز است، $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبه اول و دوم در I ، a و b دو نقطه I که $a < b$ ، $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$ ، که $f''(c) = 0$.

برهان. شرایط قضیه رل معمول برای $[a, b]$ برقرار است، پس نقطه‌ای c_1 وجود دارد، $a < c_1 < b$ ، که $f'(c_1) = 0$.

حال شرایط قضیه رل معمولی برای تابع f' در $[a, c_1]$ برقرار می‌شود زیرا که $f'(a) = f'(c_1) = 0$. پس نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < c_1$ ، که $f''(c) = (f')'(c) = 0$. \square

(17-4) (همتای قضیه میانگین برای مشتق دوم) I یک بازه باز است، $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبه اول و دوم در I ، a و b و نقطه I که $a < b$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$ ، که:

$$f(b) - [f(a) + f'(a)(b - a)] = \frac{1}{2} f''(c)(b - a)^2 \quad (5)$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $b = b + a$ ، (۵) به (۴) تبدیل می‌شود و پس از اثبات ۱۷-۴، صحت ۱۷-۲ نیز نتیجه می‌شود.

برهان ۱۷-۴. مشابه شیوه‌ای که از قضیه رل معمولی، قضیه میانگین را نتیجه گرفتیم، عمل می‌کنیم. در آنجا با کم کردن مقدار y خط واصل از $(a, f(a))$ به $(b, f(b))$ از $y = f(x)$ دیدیم که تفاضل در قضیه رل صدق می‌کند. در اینجا چون شیب خط راست فوق لازم نیست برابر $f'(a)$ باشد، این تفاضل شرط لازم برای مشتق در نقطه آغازی را برآورده نمی‌کند. بنابراین تابعی یک درجه پیچیده‌تر از تابع یک (با نمودار خط راست) باید جستجو کنیم که در نقطه a مقدار تابع و مقدار مشتق آن برابر به ترتیب $f(a)$ و $f'(a)$ باشند، و در نقطه b ، مقدار تابع برابر $f(b)$ برای برآورده کردن این سه شرط یک تابع درجه ۲ کفایت می‌کند. تابعی کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

برای اینکه $\phi(a) = f(a)$ ، باید داشته باشیم $A = f(a)$. اگر یک بار از ϕ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\phi'(x) = B + 2C(x - a)$$

برای اینکه $\phi'(a) = f'(a)$ ، باید داشته باشیم $B = f'(a)$ ، پس

$$\phi(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + C(x - a)^2 \quad (6)$$

برای تعیین ضریب C ، از شرط $\phi(b) = f(b)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + C(b - a)^2$$

یا

$$C = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b - a)]}{(b - a)^2} \quad (7)$$

بدین ترتیب با این مقدار برای C ، تابع ϕ در (۶) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\phi(a) = f(a) \quad , \quad \phi'(a) = f'(a) \quad , \quad \phi(b) = f(b) \quad (8)$$

حال تابع g را به صورت

$$g(x) = f(x) - \phi(x)$$

تعریف می کنیم. از (۸) نتیجه می شود که

$$g(a) = g(b) = 0, \quad g'(a) = 0$$

بنابراین طبق (۱۷-۳) نقطه ای c وجود دارد، $a < c < b$ ، که $g''(c) = 0$ ولی:

$$g''(c) = f''(c) - 2C = 0$$

یا

$$f''(c) = (2) \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2}$$

و با طرفین - وسطین حکم (۵) نتیجه می شود. □

بدین ترتیب همان طور که قبل از ارائه برهان اشاره شد، تخمین خطای تقریب خطی، یعنی فرمول (۴) و گزاره ۱۷-۲ از ۱۷-۴ نتیجه می شوند.

مثال ۶. تقریب خطی $\sqrt[3]{1/0.12} \simeq 1/0.04$ را که در مثال ۱ آوردیم بررسی می کنیم. در این مثال داشتیم $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، پس $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ و $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$. بنابراین طبق ۱۷-۲

$$\sqrt[3]{1/0.12} - 1/0.04 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)\frac{1}{c^{\frac{5}{3}}}\left(\frac{12}{1000}\right)^2 \quad (9)$$

که در اینجا c بین ۱ و $1/0.12$ است. ۱۷-۲ اطلاع دقیق تری در مورد c نمی دهد و اصولاً نباید انتظار داشت که بتوان میزان خطا را به راحتی و دقت به دست آورد زیرا در این صورت با افزودن این مقدار به مقدار تقریبی، مقدار دقیق به دست می آمد. آنچه در اینجا مطلوب است یافتن حدود یا یک کران بالایی برای قدر مطلق خطا است. اگر بتوانیم کرانی بالایی برای خطا به دست آوریم که در کاربرد خاص مورد نظر قابل قبول باشد، تقریب مطرح شده نیز پذیرفتنی است. در اینجا چون $1/0.12 < c < 1$ و c در مخرج طرف راست (۹) است، با قرار دادن $c = 1$ ، قدر مطلق طرف راست

(۹) یک کران بالایی برای قدرمطلق خطا به دست می‌دهد:

$$|\sqrt[3]{1/0.12} - 1/0.04| < \frac{16}{106}$$

بنابراین اگر مثلاً دقت 10^{-4} مورد نظر باشد، تقریب بالا قابل قبول است. اگر از قاعده روند کردن استفاده کنیم، چون $10^{-4} < \frac{16}{106}$ ، تقریب $1/0.04$ تا چهار رقم اعشار درست است. محاسبه با یک ماشین حساب به نسبت قوی می‌دهد $\sqrt[3]{1/0.12} \simeq 1/0.039841$ که اگر به چهار رقم پس از اعشار روند شود به همان $1/0.04$ می‌رسد.

ذکر یکی دو نکته در مورد مثال بالا لازم است. اول اینکه علامت منفی طرف راست (۹) نشانگر این است که تقریب $1/0.04$ از مقدار واقعی بزرگتر است. در واقع با توجه به علامت منفی $f''(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$ برای $x > 0$ ، مشاهده می‌کنیم که $\frac{1}{3}f''(c)h^2 < 0$ و طبق (۴) نمودار تابع همواره زیر خط مماس قرار دارد (شکل ۵).

نکته دوم که از $f''(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$ و نیز نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ، $x > 0$ ، مشاهده می‌شود این است که $|f''(x)|$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ به $+\infty$ میل می‌کند در حالی که $|f''(x)|$ به صفر میل می‌کند وقتی $x \rightarrow +\infty$. در نمودار این نکته به این صورت ظاهر می‌شود که شیب خط مماس بر نمودار وقتی $x \rightarrow 0^+$ به شدت تغییر می‌کند در حالی که تغییر شیب وقتی $x \rightarrow +\infty$ بسیار کندتر است. بنابراین می‌توان انتظار داشت که مثلاً مقداری که تقریب خطی در نقطه $a = 1$ برای $\sqrt[3]{1+h}$ به دست می‌دهد، یعنی $1 + \frac{h}{3}$ ، برای $h > 0$ دقیق‌تر از $h < 0$ با همان $|h|$ باشد. مثلاً برای $h = 0.21$ مقدار تقریبی $1/0.7$ به دست می‌آید که تا دو رقم اعشار با روند کردن درست است (ماشین حساب به نسبت قوی مقدار $1/0.656$ را می‌دهد که با روند کردن به $1/0.7$ تبدیل می‌شود). این در حالی است که برای $h = -0.21$ تقریب 0.93 با مقدار ارائه شده توسط ماشین حساب به صورت 0.92443 تا دو رقم پس از اعشار، پس از روند کردن، مطابقت ندارد. برای $|h|$ بزرگتر تفاوت فاحش‌تر می‌شود. برای $h = 1$ ، اختلاف تقریب خطی $1/333333 = 1 + \frac{1}{3}$ با مقدار $1/259921$ ماشین حساب حدوداً $1/73412$ است در حالی که برای $h = -1$ ، تقریب خطی $\frac{2}{3}$ با مقدار واقعی 0.666666 ، $\frac{2}{3} = 0.666666$ ، اختلاف دارد.