قاعدهٔ زنجیره‌ای

یکی از اساسی‌ترین قضایای ابتدایی مربوط به مشتق، مشتق‌پذیر بودن ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر و فرمول حاصل برای مشتق ترکیب دو تابع است که به "قاعده زنجیره‌ای" معروف می‌باشد. قبل از بیان این مطلب، مفهوم مشتق‌پذیری را که تاکنون به دو صورت معادل وجود یک حد، و وجود تابع درجه یک مماس، بررسی کرده‌ایم، به صورت معادل سومی ارائه می‌کنیم.

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی a از S مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $f'(a)$ می‌باشد. در این صورت می‌دانیم که:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} = 0 \qquad (1)$$

که در اینجا $f(a) + f'(a)h$ مقدار تقریب خطی f در نقطهٔ a به‌ازای $x = a + h$ است. اگر بنویسیم

$$\phi(h) = \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} \qquad (2)$$

ϕ تابعی است که در یک بازه محذوف حول 0 تعریف شده است، یعنی برای $|h|$ کوچک و $h \neq 0$، زیرا a یک نقطهٔ درونی S است و برای $|h|$ کوچک $f(a+h)$ تعریف شده است. به علاوه $\phi(h) \longrightarrow 0$ وقتی $h \longrightarrow 0$. پس از طرفین ـ وسطین در (۲) می‌توان نوشت

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \phi(h)h \qquad (3)$$

بنابراین اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، عددی حقیقی $f'(a)$ وجود دارد و تابعی ϕ تعریف شده به‌ازای $|h|$ کوچک $\neq 0$، به طوری که $\phi(h) \longrightarrow 0$ وقتی $h \longrightarrow 0$ و رابطهٔ (۳) برقرار است. بالعکس فرض کنید

برای تابعی f که a یک نقطهٔ درونی دامنهٔ آن است، عددی حقیقی m وجود داشته باشد و تابعی ϕ تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq 0$ که $\phi(h) \longrightarrow 0$ وقتی $h \longrightarrow 0$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

در این صورت

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - m = \phi(h)$$

و چون $\phi(h) \longrightarrow 0$ وقتی $h \longrightarrow 0$، نتیجه می‌شود که حد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود دارد وقتی $h \longrightarrow 0$ و برابر m است. بدین ترتیب می‌توان مشتق‌پذیری f در a را به صورت معادل زیر بیان کرد

(۱۵–۱) گزاره. $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و a یک نقطهٔ درونی S است. در این صورت f در a مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر عددی حقیقی m و تابعی ϕ تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq 0$ وجود داشته باشند که $\phi(h) \longrightarrow 0$ وقتی $h \longrightarrow 0$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

□

البته m را معمولاً به $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق f در نقطهٔ a می‌نامیم. رابطهٔ (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت گویای دیگری نیز نوشت. اگر متغیر تابع f را به x و مقدار f را به y نمایش دهیم، $y = f(x)$، تغییر کوچک در مقدار x را گاهی به جای h، به Δx، و تغییر متناظر در y را به جای $f(a+h) - f(a)$ به Δy نمایش می‌دهیم. در این صورت (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x \cdot \phi(\Delta x) \qquad (۴)$$

یا معادلاً

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x \phi(\Delta x) \qquad (۵)$$

توجه کنید که $f'(a)\Delta x$ مقدار تغییر y روی خط مماس است. بنابراین مشتق‌پذیری f در a را می‌توان بدین صورت تعبیر کرد که خطی وجود دارد گذرا از نقطهٔ $(a, f(a))$ که اختلاف مقدار y روی این خط

و مقدار y تابع، در نزدیکی نقطهٔ a، "بسیار کوچک" است بدین معنی است که حاصل‌ضرب دو کمیت Δx و $\phi(\Delta x)$ می‌باشد که هر یک به صفر میل می‌کنند وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$.

(۱۵–۲) قاعدهٔ زنجیره‌ای. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند، a یک نقطهٔ درونی S است، b یک نقطهٔ درونی T، و $f(a) = b$. اگر تابع f در a و تابع g در b مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \qquad (٦)$$

برهان. نخست توجه کنید که دامنهٔ $g \circ f$ عبارت است از

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

برای اینکه مشتق‌پذیری $g \circ f$ در a مطرح شود، a باید یک نقطهٔ درونی S' باشد. البته $a \in S'$ چون $f(a) = b$ عضو T است، ولی باید نشان دهیم برای x های به اندازهٔ کافی نزدیک a نیز داریم $f(x) \in T$. چون b یک نقطهٔ درونی T است، $e > 0$ وجود دارد که $]b - e, b + e[$ به تمامی در T قرار دارد. تابع f در a مشتق‌پذیر است، پس در a پیوسته نیز می‌باشد، بنابراین $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه $x \in S$ و $|a - x| < \delta$، آنگاه $|f(x) - b| < e$، یعنی $f(x)$ در T قرار دارد. چون a یک نقطهٔ درونی S است، می‌توان δ فوق را در صورت لزوم کوچکتر کرد به طوری که برای هر x با $|x - a| < \delta$ داریم $x \in S$. نتیجه اینکه برای x های به اندازهٔ کافی نزدیک به a، $f(x)$ در T قرار می‌گیرد، یعنی a یک نقطهٔ درونی S' است.

حال به اثبات مشتق‌پذیری $g \circ f$ در a و محاسبه مشتق می‌پردازیم. می‌نویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$. چون f در a مشتق‌پذیر است، تابعی ϕ وجود دارد که برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده است، $\phi(\Delta x) \longrightarrow 0$ وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، و داریم

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x \phi(\Delta x) \qquad (٧)$$

همچنین چون g در b مشتق‌پذیر است، تابعی ψ وجود دارد که برای $|\Delta y|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده

است، $\psi(\Delta y) \longrightarrow 0$ وقتی $\Delta y \longrightarrow 0$، و داریم

$$\Delta z - g'(b)\Delta y = \Delta y \psi(\Delta y) \qquad (8)$$

با جایگزینی (۸) در (۹) حاصل می‌شود

$$\Delta z - g'(b)(f'(a)\Delta x + \Delta x \phi(\Delta x)) = (f'(a)\Delta x + \Delta x \phi(\Delta x))\psi(\Delta y)$$

یا

$$\Delta z - (g'(b)f'(a))\Delta x = \Delta x\{g'(b)\phi(\Delta x) + [f'(a) + \phi(\Delta x))]\psi(\Delta y)\}$$

اگر نشان دهیم عبارت داخل آکلاد $\{\ \ \}$ برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، حکم به اثبات می‌رسد. در داخل $\{\ \ \}$ کافی است نشان می‌دهیم $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، وضعیت سایر جملات روشن است. $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta y|$ کوچک تعریف شده است. چون f در a پیوسته است، اگر $|\Delta x|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $|\Delta y|$ نیز به اندازهٔ مورد نظر کوچک خواهد شد، پس $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta x|$ کوچک تعریف شده است. از طرفی دیگر مجدداً بنابر پیوستگی f، اگر $\Delta x \longrightarrow 0$، داریم $\Delta y \longrightarrow 0$، پس $\psi(\Delta y) \longrightarrow 0$ وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، و حکم به اثبات می‌رسد. □

مثال ۱. مشتق تابع $h(x) = (x^2 + x + 1)^{10}$ را به‌دست آورید. البته در اینجا تابع h به وضوح مشتق‌پذیر است زیرا که اگر عبارت $x^2 + x + 1$ در خود ۱۰ بار ضرب شود یک چندجمله‌ای (از درجه ۲۰) به‌دست می‌آید. اگر بنویسیم $f(x) = x^2 + x + 1$ و $g(x) = x^{10}$، داریم $h(x) = (g \circ f)(x)$. چون $f'(x) = 2x + 1$ و $g'(x) = 10x^9$، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 10(x^2 + x + 1)^9(2x + 1) \end{aligned}$$

مثال ۲. نشان دهید تابع $h(x) = \sin(\cos x)$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن را به‌دست آورید. می‌نویسیم

$f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$، پس $h(x)=(g\circ f)(x)$. بنابراین

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))\cdot f'(x) \\ &= \cos(\cos x)\cdot(-\sin x) \end{aligned}$$

مثال ۳. تابعی مشتق‌پذیر دارای این ویژگی است که $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۲$. مشتق تابع $h=f\circ f$ را در $x=۰$ به‌دست آورید. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$h'(۰)=f'(f(۰))\cdot f'(۰)$$

چون $f(۰)=۰$، نتیجه می‌شود که $h'(۰)=f'(۰)^{۲}$، یا $h'(۰)=۴$.

(۱۵–۳) نمادگذاری لایب‌نیتس

لایب‌نیتس برای بیان مشتق نمادی ابداع کرد که برای محاسبات طولانی بسیار سودمند است هرچند که بی‌دقتی در استفاده از آن ممکن است موجب گمراهی شود. اگر تابع f را به $y=f(x)$ نمایش دهیم و f مشتق‌پذیر باشد، $f'(x)$ را لایب‌نیتس به $\frac{dy}{dx}$ نمایش داد که در اینجا نماد x در مخرج نمایشگر متغیر و نماد y در صورت، نمایشگر مقدار تابع است. مقدار مشتق در نقطهٔ $x=a$ به این ترتیب به $\frac{dy}{dx}(a)$، $\frac{dy}{dx}|_a$ یا $\frac{dy(f(a))}{dx(a)}$ نمایش داده می‌شود هرچند که نمایش سوم کمتر به‌کار می‌رود. از آنجا که مشتق، حد یک کسر، یعنی حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، است، این مفهوم از بعضی رفتارهای کسر گونه برخوردار است و گاهی شکل کسری $\frac{dy}{dx}$ احکام درستی را تداعی می‌کند. ولی باید توجه داشت که $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بدین معنی نیست که dy حد Δy است و dx حد Δx، زیرا که در چارچوب ما حد Δx و Δy هر دو صفر هستند. تعبیر درستی که در این چارچوب می‌توان از $\frac{dy}{dx}$ به عنوان یک کسر ارائه کرد به صورت زیر است. فرض کنید تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است، یعنی $f'(a)$ وجود دارد. اگر به جای f، تقریب خطی f در نقطهٔ a را در نظر بگیریم که نمودار آن یک خط راست به شیب $f'(a)$ است، این تابع به هر مقدار نمو h از متغیر، مقدار نمو $f'(a)h$ در مقدار تابع را نظیر می‌کند. $dx(a)$ را باید نمو متغیر تابع تقریب خطی و $dy(f(a))$ را نمو مقدار تابع تقریب خطی تلقی کرد، که در این صورت $dy(f(a))=f'(a)\cdot dx(a)$. بدین ترتیب

پیشوند "d" در dx و dy بدین معنی است که متغیر، مربوط به تقریب خطی است، نه خود تابع. در مورد خود تابع، از Δx و Δy به عنوان نمو متغیر و نمو مقدار تابع استفاده می‌کنیم. شکل ۱ در توضیح این موضوع است.

با استفاده از نمادگذاری لایب‌نیتس، نتیجه قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکلی یادماندنی در می‌آید. اگر در ۱۵—۲ بنویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$، آنگاه $z = (g \circ f)(x)$، و (۷) صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{dz(g(b))}{dx(a)} = \frac{dz(g(b))}{dy(b)} \cdot \frac{dy(b)}{dx(a)} \qquad (۹)$$

یا

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(b) \cdot \frac{dy}{dx}(a) \qquad (۱۰)$$

که به اختصار نوشته می‌شود:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (۱۱)$$

به این شکل، وقتی تعداد ترکیب‌ها زیاد و محاسبات طولانی است، پیگیری محاسبات سریعتر می‌شود ولی باید همواره در ذهن داشت که $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dz}{dy}$ در نقاط مختلف مطرح هستند، اولی در a و دومی در $b = f(a)$، در حالی که $\frac{dz}{dx}$ در نقطهٔ a مطرح است.

با روش تحریر (۱۰) ممکن است این سؤال پیش آید که چرا قاعدهٔ زنجیره‌ای با حذف $dy(b)$ از صورت و مخرج نتیجه نمی‌شود؟ این کار دو اشکال دارد، اول اینکه تا مشتق‌پذیری $g \circ f$ در نقطهٔ a ثابت نشود، اصلاً $\frac{dz(g(b))}{dx(a)}$ معنی ندارد، و دوم اینکه ممکن است $dy(b)$ صفر باشد که در این صورت حذف آن از صورت و مخرج مجاز نیست.

مثال ۱. ظرفی قیف شکل به ارتفاع $۲۰cm$ و شعاع قاعدهٔ $۱۰cm$ طوری قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و محور قیف در راستای قائم قرار دارد. اگر آب به سرعت $۲۰ \frac{cm^۳}{sec}$ در این ظرف ریخته شود، آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب $٦cm$ باشد پیدا کنید.

متغیر زمان برحسب ثانیه را به t، ارتفاع آب در زمان t را به h، و حجم آب در زمان t را به V نمایش می‌دهیم. h و V هر دو تابع t هستند و به فرض مشتق‌پذیری، $\frac{dh}{dt}$ (آهنگ تغییر ارتفاع سطح آب) و $\frac{dV}{dt}$ (آهنگ تغییر حجم آب) معنی دارند. در واقع $\frac{dV}{dt} = ۲$ داده شده است و مجهول مسأله $\frac{dh}{dt}$ است وقتی که $h = ٦$. توجه کنید که می‌توان V را به عنوان تابعی صرفاً از h در نظر گرفت. اگر r شعاع سطح آب در زمان t باشد، به سبب تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{h} = \frac{۱۰}{۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

پس

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۱۲}h^۳$$

حال طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

از فرمول V برحسب h نتیجه می‌شود که $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{۴}h^۲$، پس با جایگزینی در فرمول بالا داریم:

$$۲ = (\frac{\pi}{۴}h^۲)(\frac{dh}{dt})$$

مجهول مسأله $\frac{dh}{dt}$ است وقتی $h = ٦$، پس $\frac{dh}{dt} = \frac{۲}{۹\pi}\ \frac{cm}{sec}$.

مثال ۲. یک منبع نور S در فاصلهٔ ۴ متر از دیواری قرار دارد. این منبع نور در داخل محفظهٔ مدوری به مرکز S قرار دارد که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\frac{۱}{۲}$ رادیان بر ثانیه در جهت مثلثاتی می‌چرخد. روی سطح این محفظه سوراخی قرار دارد که نور از آن سوراخ بر دیوار می‌تابد و در نتیجه یک نقطهٔ نورانی روی دیوار حرکت می‌کند. تندی حرکت نقطهٔ نورانی روی دیوار را وقتی این نقطه در فاصلهٔ ۵ متری از S قرار دارد پیدا کنید.

θ را زاویهٔ بین امتداد موازی دیوار از نقطهٔ S به شعاع حامل به سوراخ می‌گیریم. داریم:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۲} \quad (\frac{rad}{sec})$$

از طرفی دیگر داریم $x = ۴\cot\theta$. بنابراین طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{۴}{\sin^۲\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

که $\frac{dx}{dt}$ سرعت حرکت نقطهٔ نورانی روی دیوار است. وقتی فاصله S از دیوار ۵ متر باشد داریم

$$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{۱۰۰}{۱۶}\cdot\frac{۱}{۲} = -۳/۲۵$$

و چون تندی حرکت، یعنی قدرمطلق سرعت، مورد نظر است، نقطهٔ نورانی وقتی فاصلهٔ آن از S پنج متر است با تندی ۳/۲۵ متر بر ثانیه حرکت می‌کند.

یکی از کاربردهای قاعدهٔ زنجیره‌ای یافتن مشتق تابع وارون (ترکیبی) است. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوستهٔ (اکیداً) صعودی یا (اکیداً) نزولی. می‌دانیم که $f^{-۱}$ نیز پیوسته است. در زیر حالتی را در نظر می‌گیریم که f مضافاً مشتق‌پذیر با مشتق مثبت یا منفی در سراسر درون بازهٔ I است.

(۱۵–۴) قضیه. I یک بازه است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر است و مشتق آن همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است. در این صورت تابع وارون ترکیبی، $f^{-۱}$، نیز در همهٔ نقاط درونی دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر نقطهٔ درونی $b = f(a)$ از دامنهٔ $f^{-۱}$ داریم:

$$(f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{f(a)} \qquad (۱۲)$$

برهان. اگر مشتق‌پذیری $f^{-۱}$ ثابت شود، فرمول بالا به سادگی از به‌کارگیری قاعدهٔ زنجیره‌ای برای $(f^{-۱}\circ f)(x) = x$ نتیجه می‌شود، ولی اثبات مشتق‌پذیری که در زیر خواهد آمد خود این نتیجه را به‌دست می‌دهد. چون مشتق همه‌جا مثبت یا منفی است می‌دانیم که تابع صعودی یا نزولی است، و چون f پیوسته است، می‌دانیم که نقاط درونی بازهٔ I تحت f به نقاط درونی بازهٔ تعریف $f^{-۱}$ نگاشته

می‌شوند و بالعکس. حال فرض کنید a یک نقطهٔ درونی I است، پس $b = f(a)$ یک نقطهٔ درونی دامنهٔ f^{-1} می‌باشد. بنابراین اگر $|k|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $b + k$ نیز یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تعریف f^{-1} است. ولی دامنهٔ f^{-1} از نقاط $f(x)$ تشکیل شده است که x در دامنهٔ f است، پس داریم $b + k = f(a + h)$ برای h مناسب. بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(b+k)-f^{-1}(b)}{k} &= \lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(f(a+h))-f^{-1}(f(a))}{f(a+h)-f(a)} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{h}{f(a+h)-f(a)} \end{aligned}$$

از آنجا که f^{-1} پیوسته است نتیجه می‌گیریم که وقتی $k \longrightarrow 0$، آنگاه $h \longrightarrow 0$، بنابراین حد بالا برابر است با:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{f(a+h) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

و حکم مورد نظر به اثبات می‌رسد. □

(۱۵–۵) چند مثال مهم

(۱۵–۵–۱) $\mathbb{R}^+$ را مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت بگیرید و فرض کنید n یک عدد صحیح ناصفر است. تابع $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌شود مشتق‌پذیر است و $f'(x) = nx^{n-1}$. برای $x \in \mathbb{R}^+$ داریم $f'(x) > 0$ اگر $n > 0$ و $f'(x) < 0$ اگر $n < 0$. بنابراین تابع $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

تعریف می‌شود طبق قضیهٔ بالا مشتق‌پذیر است. از (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x^n) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{n}x^{1-n} \end{aligned}$$

و اگر به جای x^n، مقدار x را جایگزین کنیم:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \qquad (۱۳)$$

پس فرمول $\frac{d(x^p)}{dx} = px^{p-1}$ هم برای اعداد صحیح p و هم برای اعداد به شکل $\frac{1}{n}$ برقرار است. در واقع اکنون نتیجه می‌شود که فرمول برای توان گویا برقرار است زیرا تابع $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$، $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$، را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ و $g(x) = x^m$ نوشت، $h = g \circ f$، پس طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (\tfrac{1}{n}) x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \tfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

(۱۵–۵–۲) دیدیم که اگر تابع مثلثاتی سینوس را به دامنهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود کنیم، وارون ترکیبی آن، $\sin^{-1}$، وجود دارد و پیوسته است. حال $\sin' x = \cos x$ در درون بازهٔ تعریف، یعنی در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ همواره مثبت است، پس $\sin^{-1}$ در $]-1, 1[$ مشتق‌پذیر است. اگر با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای از $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\sin'(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

$$\cos(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

برای x در $]-1, 1[$، $\sin^{-1}(x)$ در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد، پس $\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$، در نتیجه:

$$(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (14)$$

ضمناً توجه کنید که چون:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$(\cos^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (15)$$

(۱۵–۵–۳) تابع $\tan^{-1}$ را در نظر می‌گیریم که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و در $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد. از آنجا که $\tan' x = 1+\tan^2 x > 0$، طبق قضیه، $\tan^{-1}$ مشتق‌پذیر است. به علاوه با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، اگر از $\tan(\tan^{-1}(x)) = x$ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\tan'(\tan^{-1} x)\cdot(\tan^{-1})'(x) = 1$$

$$(1+\tan^2(\tan^{-1}(x)))\cdot(\tan^{-1})'(x) = 1$$

پس

$$(\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (16)$$

مجدداً از اینکه $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$، نتیجه می‌گیریم که

$$(\cot^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \qquad (17)$$