تمرین ریاضی عمومی ۱

(گروه‌های دکتر شهشهانی)

سری دوم

۱) (کسرهای مسلسل) فرض کنید دنبالهٔ اعداد حقیقی مثبت $a_0, a_1, a_2, \ldots$ داده‌شده‌است. حاصل کسر $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$ را به $\frac{p_n}{q_n}$ و حاصل $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$ را به $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ نمایش می‌دهیم. (طبق قرارداد کسرهای $\frac{p_n}{q_n}$ و $\frac{p'_n}{q'_n}$ را ساده نمی‌کنیم حتی اگر صورت و مخرج عدد صحیح باشند.)

بنابراین داریم:

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \quad \text{و} \quad q_n = p'_{n-1}$$

(الف) به روش استقراء ثابت کنید روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$$

(ب) ثابت کنید

$$\begin{cases} q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k \\ q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k \end{cases}$$

(ج) نتیجه بگیرید که اگر a_i ها همه عدد طبیعی باشند کسر $\frac{p_n}{q_n}$ ساده نمی‌شود (یعنی صورت و مخرج مقسوم‌علیه مشترک ندارند.)

(د) فرض کنید a_i ها عدد طبیعی هستند نشان دهید دنبالهٔ $\frac{p_n}{q_n}$ ها با اندیس n زوج صعودی است و دنبالهٔ $\frac{p_n}{q_n}$ ها با اندیس n فرد نزولی است.

(ه) نشان دهید که اگر a_i ها همه عدد طبیعی باشند دنبالهٔ $\frac{p_n}{q_n}$ همگراست. حد دنباله را به صورت زیر نمایش می‌دهیم: $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$

۲) فرض کنید a و b عدد طبیعی باشند،

(الف) عبارت $\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{\cdots}}}}$ را معنی کنید و نشان دهید حد یک دنبالهٔ همگراست.

(ب) نشان دهید $\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{\cdots}}}} = a + \frac{b}{a+\frac{b}{a+\frac{b}{\ddots}}}$

(اول نشان دهید طرف راست نیز همگراست)

۳) فرض کنید $\{a_n\}$ دنبالهٔ فیبوناچی است، یعنی $a_۱ = ۱$، $a_۲ = ۱$، $a_۳ = ۲$، $a_۴ = ۳$، $a_۵ = ۵$، و به‌طور کلی $a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n$. ثابت کنید:

$$a_n = \frac{(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n - (\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n}{\sqrt{۵}}$$

(راهنمایی: استقراء)

تذکر: تمرینها از کتاب $Edwards, Penney$ انتخاب شده‌اند.

صفحه ۶۹۰: ۱۰، ۱۳، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۹، ۳۰، ۳۳، ۳۵، ۳۶، ۳۸، ۴۲، ۵۱، ۵۲، ۵۳ و ۵۶.

صفحه ۶۹۹: ۲، ۴، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۲۰، ۴۱، ۴۳، ۵۵، ۶۱، ۶۲ و ۶۳.

صفحه ۷۲۷: ۱، ۴، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۲۰، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۴۷، ۴۸، ۴۹ و ۵۰.

صفحه ۷۳۵: ۱، ۴، ۷، ۱۸، ۲۰، ۲۳، ۲۵، ۲۶، ۲۸، ۳۰، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۹، ۴۰، ۴۸، ۵۱، ۵۲، ۵۷ و ۶۰.