ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $I\!R^n$ (۲)

در پایان جلسهٔ گذشته مشاهده کردیم که اگر $e_1, \ldots, e_n$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ باشد، هر عنصر x از $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \tag{1}$$

نمایش داد. حال به یک تعمیم این مطلب اشاره می‌کنیم. به طور کلی، اگر $\{b_1, \ldots, b_k\}$ یک مجموعه در $\mathbb{R}^n$ باشد (در حالت خاص، پایه‌ای برای زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$)، $\{b_1, \ldots, b_k\}$ را متعامد می‌نامیم در صورتی که $b_i \perp b_j$ برای $i \neq j$. مجموعهٔ $\{b_1, \ldots, b_k\}$ را راست هنجار می‌نامیم در صورتی که متعامد باشد و به علاوه $|b_i| = 1$ برای $i = 1, \ldots, k$. به عنوان نمونه، $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایه راست هنجار برای $\mathbb{R}^n$ است و هرگاه اعداد حقیقی ناصفر $c_1, \ldots, c_n$ داده شده باشند، $\{c_1 e_1, \ldots, c_n e_n\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbb{R}^n$ است. حال فرض کنید $\{b_1, \ldots, b_k\}$ یک پایهٔ راست هنجار برای زیرفضای خطی E باشد و $x \in E$. داریم $x = \sum_{i=1}^{k} t_i b_i$. اگر ضرب داخلی دو طرف را با b_j، j ثابت، محاسبه کنیم، حاصل می‌شود $x \cdot b_j = \sum_{i=1}^{k} t_i (b_i \cdot b_j)$. از آنجا که پایه راست هنجار است، نتیجه می‌شود که $b_i \cdot b_j = 0$ اگر $i \neq j$ و $b_j \cdot b_j = 1$، پس $x \cdot b_j = t_j$. بنابراین عین فرمول (۱) در اینجا نیز برقرار است:

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \cdot b_i) b_i \tag{2}$$

بدین ترتیب محاسبهٔ ضرایب نمایش نسبت به یک پایهٔ راست هنجار بسیار ساده است. به زودی یک روش عمومی برای ساختن پایه‌های راست هنجار برای زیرفضاهای خطی ارائه خواهیم کرد، ولی مقدمتاً گزارهٔ زیر را مطرح می‌کنیم:

(۱۰–۱) گزاره. اگر $\{B_1, \ldots, B_k\}$ یک مجموعهٔ متعامد متشکل از عناصر ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید $c_1 B_1 + \cdots + c_k B_k = \underline{0}$، باید ثابت کنیم همهٔ c_i ها صفر هستند. برای j ثابت و دلخواه، حاصل‌ضرب داخلی دو طرف رابطه را با B_j محاسبه می‌کنیم:

$$c_1 (B_1 \cdot B_j) + \cdots + (B_k \cdot B_j) = 0$$

ولی $B_i \cdot B_j = 0$ مگر وقتی که $i = j$ که در این صورت $B_j \cdot B_j = |B_j|^2$ ناصفر است زیرا که همه $B_1, \ldots, B_k$ ناصفر فرض شده‌اند. پس از رابطهٔ $c_j |B_j|^2 = 0$ نتیجه می‌گیریم که $c_j = 0$. چون j در بین $1, \ldots, k$ دلخواه بود، حکم به اثبات می‌رسد. □

اکنون نشان می‌دهیم چگونه می‌توان به کمک هر پایهٔ داده شده برای زیرفضای خطی E، یک پایهٔ راست هنجار برای E ساخت:

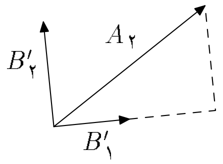
(۱۰–۲) روش گرام–اشمیت. فرض کنید E یک زیرفضای خطی k– بعدی از $\mathbb{R}^n$ است که متشکل از ترکیب‌های خطی $t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$ از مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ می‌باشد. می‌خواهیم یک پایهٔ راست هنجار $\{B_1, \ldots, B_k\}$ برای E بسازیم. برای این کار نخست یک پایهٔ متعامد $\{B'_1, \ldots, B'_k\}$ برای E به‌دست می‌آوریم، سپس با قرار دادن $B_i = \frac{1}{|B'_i|} B'_i$، یک پایهٔ راست هنجار حاصل می‌شود.

برای ساختن $\{B'_1, \ldots, B'_k\}$، گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) قرار می‌دهیم $B'_1 = A_1$.

۲) برای ساختن B'_2، تصویر قائم A_2 بر $B'_1 = A_1$ را از A_2 کم می‌کنیم:

$$B'_2 = A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 \qquad (۳)$$



توجه کنید که $B'_2 \perp B'_1$ زیرا حاصل‌ضرب داخلی طرف راست با B'_1 صفر می‌شود. به علاوه $B'_2 \neq 0$ زیرا که اگر $B'_2 = 0$، آنگاه با توجه به این که $A_1 = B'_1$، یک رابطهٔ وابستگی خطی $A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} A_1$ در $\{A_1, A_2\}$ پدید می‌آید که خلاف فرض استقلال خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$، و در نتیجه استقلال خطی هر زیرمجموعهٔ آن، است. نتیجه این که بنابر گزارهٔ ۱۰–۱، $\{B'_1, B'_2\}$ مستقل خطی است. ضمناً توجه کنید که $\langle B'_1, B'_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$ زیرا که $B'_1 = A_1$ و طبق (۳) می‌توان نقش A_2 و B'_2 را مبادله کرد.

۳) به طور استقرایی می‌توان به این روش ادامه داد. اگر $\{B'_1, \ldots, B'_j\}$ به‌دست آمده باشد، $j < k$، که عناصر آن ناصفر و دو به دو بر هم عمودند به طوری که $\langle B'_1, \ldots, B'_j \rangle = \langle A_1, \ldots, A_j \rangle$، B'_{j+1} را به روش زیر می‌سازیم:

$$B'_{j+1} = A_{j+1} - \frac{A_{j+1} \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 - \cdots - \frac{A_{j+1} \cdot B'_j}{B'_j \cdot B'_j} B'_j \qquad (۴)$$

در واقع در (۴) تصویر قائم A_{j+1} بر تک تک $B'_1, \ldots, B'_j$ را از A_{j+1} کم کرده‌ایم. حاصل باید بر $B'_1, \ldots, B'_j$ عمود باشد که این موضوع با محاسبه حاصل‌ضرب داخلی دو طرف راست (۴) با B'_i، $i = 1, \ldots, j$، مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که $B'_{j+1} \neq 0$ زیرا که طبق فرض

استقراء $\langle B'_1,\ldots,B'_j\rangle = \langle A_1,\ldots,A_j\rangle$، و $\{A_1,\ldots,A_j,A_{j+1}\}$ مستقل خطی است. و بالاخره مجموعهٔ متعامد $\{B'_1,\ldots,B'_{j+1}\}$ که همهٔ عناصرش ناصفرند، طبق ۱۰−۱ مستقل خطی است و مجدداً با استدلال مشابه گام ۲ داریم $\langle B'_1,\ldots,B'_{j+1}\rangle = \langle A_1,\ldots,A_{j+1}\rangle$.

بدین ترتیب با ادامهٔ روش، در k گام به مجموعهٔ $\{B'_1,\ldots,B'_k\}$ دست می‌یابیم که از عناصر ناصفر دو به دو بر هم عمود در E تشکیل شده است. چون تعداد عناصر برابر بعد E است و مجموعه طبق ۱۰−۱ مستقل خطی است، به یک پایهٔ متعامد برای E دست یافته‌ایم. □

مثال. تحقیق می‌کنیم که مجموعه $\{A_1,A_2,A_3\}$ در $\mathbb{R}^4$ که در آن $A_1=(0,0,-1,1)$، $A_2=(1,0,2,0)$، و $A_3=(1,1,3,0)$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است. فرض کنید $c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=\underline{0}$، پس

$$(c_2+c_3, c_3, -c_1+2c_2+3c_3, c_1)=(0,0,0,0)$$

نتیجه این که $c_3=0$ و $c_1=0$ که از اینها نتیجه می‌شود $c_2=0$، پس $\{A_1,A_2,A_3\}$ مستقل خطی است. E را زیرفضای متشکل از ترکیب‌های خطی A_1,A_2,A_3 می‌گیریم، $E=\langle A_1,A_2,A_3\rangle$. توجه کنید که $\{A_1,A_2,A_3\}$ متعامد نیست، مثلاً $A_1\cdot A_2=-2\neq 0$. روش گرام‌ـ اشمیت را به‌کار می‌گیریم:

$$B'_1 = A_1 = (0,0,-1,1)$$

$$B_2 = (1,0,2,0) - \frac{(1,0,2,0)\cdot(0,0,-1,1)}{(0,0,-1,1)\cdot(0,0,-1,1)}(0,0,-1,1) = (1,0,2,0)+(0,0,-1,1)$$

یا $B'_2=(1,0,1,1)$. بالاخره:

$$\begin{aligned} B'_3 &= (1,1,3,0) - \frac{(1,1,3,0)\cdot(0,0,-1,1)}{(0,0,-1,1)\cdot(0,0,-1,1)}(0,0,-1,1) - \frac{(1,1,3,0)\cdot(1,0,1,1)}{(1,0,1,1)\cdot(1,0,1,1)}(1,0,1,1) \\ &= (1,1,3,0) + \frac{3}{2}(0,0,-1,1) - \frac{4}{3}(1,0,1,1) \\ &= (-\tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}) \end{aligned}$$

پس مجموعهٔ $\{(0,0,-1,1),(1,0,1,1),(-\frac{1}{3},1,\frac{1}{6},\frac{1}{6})\}$ یک پایهٔ متعامد برای E است، که می‌توان این مطلب را مستقیماً نیز تحقیق کرد. برای یافتن یک پایهٔ راست هنجار، هر یک از B'_i ها را در معکوس طول آن ضرب می‌کنیم:

$$B_1 = (0, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$B_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

$$B_3 = (-\tfrac{2}{\sqrt{42}}, \tfrac{6}{\sqrt{42}}, \tfrac{1}{\sqrt{42}}, \tfrac{1}{\sqrt{42}})$$

روش گرام‌ـ اشمیت در تکمیل یک مجموعهٔ متعامد (یا راست هنجار) به یک پایهٔ کامل نیز به‌کار گرفته می‌شود:

(۱۰—۳) تکمیل مجموعهٔ متعامد به پایه. فرض کنید $\{B_1,\dots,B_k\}$ یک مجموعهٔ راست هنجار از عناصر E باشد که $k < n$. نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با استفاده از روش ۱۰—۲، عناصر $B_{k+1},\dots,B_n$ از $\mathbb{R}^n$ یافت، به طوری که $\{B_1,\dots,B_n\}$ یک پایهٔ راست هنجار برای تمام $\mathbb{R}^n$ باشد. چون $k < n$، عنصری A_{k+1} از $\mathbb{R}^n$ یافت می‌شود که در $\langle A_1,\dots,A_k\rangle$ نیست. به روش گرام‌ـ اشمیت با کم کردن تصویر قائم A_{k+1} بر $B_1,\dots,B_k$، عنصری B'_{k+1} به‌دست می‌آوریم که $\{B_1,\dots,B_k,B'_k\}$ متعامد و مستقل خطی است:

$$B'_{k+1} = A_{k+1} - (A_{k+1}\cdot B_1)B_1 - \cdots - (A_{k+1}\cdot B_k)B_k$$

سپس با تعریف $B_{k+1} = \frac{1}{|B'_{k+1}|}B'_{k+1}$، یک مجموعه $\{B_1,\dots,B_k,B_{k+1}\}$ حاصل می‌شود که عناصر آن طول واحد دارند و دو به دو بر هم عمودند (یعنی یک مجموعهٔ راست هنجار). اگر $k+1 = n$ که چون این مجموعه مستقل خطی به تعدادی برابر بعد $\mathbb{R}^n$ عضو دارد، خود یک پایهٔ راست هنجار برای $\mathbb{R}^n$ می‌شود، $\mathbb{R}^n = \langle B_1,\dots,B_{k+1}\rangle$. اگر $k+1 < n$، عنصری A_{k+2} در $\mathbb{R}^n$ یافت می‌شود که در $\langle B_1,\dots,B_{k+1}\rangle$ نیست. به روش بالا، از A_{k+2}، عنصری B_{k+2} می‌سازیم که

$\{B_1, \ldots, B_{k+2}\}$ راست هنجار است. اگر این عمل را $(n-k)$ بار انجام دهیم به یک مجموعه راست هنجار n عضوی $\{B_1, \ldots, B_n\}$ می‌رسیم که بنابراین یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

(۱۰–۴) کاربرد در معادلهٔ زیرفضاها. زیرفضای مستوی E از $\mathbb{R}^n$ را یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم در صورتی که بعد E برابر $(n-1)$ باشد. بدین ترتیب ابرصفحه‌های $\mathbb{R}$، نقاط $\mathbb{R}$ هستند، ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^2$، خطوط راست در $\mathbb{R}^2$، و ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^3$، صفحات واقع در $\mathbb{R}^3$ می‌باشند. حال یک ابرصفحهٔ E از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. اگر E° انتقال‌یافتهٔ E به $\underline{0}$ باشد، می‌توان برای E° یک پایهٔ متعامد $\{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ طبق روش گرام‌ـ اشمیت در نظر گرفت. با استفاده از ۱۰–۳، عنصری C، $C \neq 0$، در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که بر $B_1, \ldots, B_{n-1}$ عمود است و در نتیجه $\{B_1, \ldots, B_{n-1}, C\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. توجه کنید که شرطی لازم و کافی برای این که عنصر x از $\mathbb{R}^n$ در E° باشد این است که:

$$C \cdot x = 0 \tag{۵}$$

زیرا اگر بنویسیم $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i + c_n C$، عناصر E° دقیقاً آن x هایی هستند که $c_n = 0$، پس اگر $x \in E$، آنگاه $B_n \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (B_1 \cdot B_n) = 0$ بالعکس اگر $C \cdot x = 0$، داریم

$$0 = C \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (C \cdot B_i) + c_n (C \cdot C) = c_n$$

حال فرض کنید ابرصفحه E به شکل $E = \langle p; B_1, \ldots, B_{n-1} \rangle$ توصیف شده است که $p = (p_1, \ldots, p_n)$ نقطه‌ای در E است. نقطهٔ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در E است اگر و تنها اگر $x - p \in E^\circ$، پس شرطی لازم و کافی برای $x \in E$ این است که

$$(x - p) \cdot C = 0 \tag{٦}$$

اگر n تایی C را به $(C_1,\ldots,C_n)$ نمایش دهیم، (۶) معادل است با

$$C_1(x_1-p_1)+\cdots+C_n(x_n-p_n)=0 \tag{۷}$$

این رابطه را معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرا از p عمود بر C می‌نامند. نمایش متداول خط در صفحه و صفحه در فضای سه بعدی حالت‌های خاص (۷) هستند.

(۷) را می‌توان به زیرفضاهای مستوی ابعاد غیر از $(n-1)$ تعمیم داد. اگر E یک زیرفضای مستوی kـ بعدی به شکل $E=\langle p;B_1,\ldots,B_k\rangle$ باشد که در آن $\{B_1,\ldots,B_k\}$ یک پایهٔ متعامد برای انتقال‌یافتهٔ E به مبدأ، E°، است، طبق روش (۱۰—۳)، $\{B_1,\ldots,B_k\}$ را به پایه‌ای متعامد $\{B_1,\ldots,B_k,B_{k+1},\ldots,B_n\}$ برای $\mathbb{R}^n$ تکمیل می‌کنیم. با استدلالی مشابه آنچه برای ابرصفحه‌ها آمد، شرطی لازم و کافی برای این که نقطهٔ x در E باشد این خواهد بود که $x-p$ بر $B_{k+1},\ldots,B_n$ عمود باشد. پس E مجموعهٔ نقاطی است که در $(n-k)$ رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$B_{k+1}\cdot(x-p)=0,\ldots,B_n\cdot(x-p)=0 \tag{۸}$$

مثال. می‌خواهیم در $\mathbb{R}^4$ فاصلهٔ نقطهٔ $(1,-1,0,2)$ را از خط راست $\frac{x_4}{3}=\frac{x_3+1}{-1}=\frac{x_2-1}{1}=\frac{x_1}{2}$ محاسبه کنیم. مقصود از فاصلهٔ نقطه از خط، کوتاهترین فاصلهٔ ممکن از نقطهٔ داده شده به نقاط روی خط است. توجه کنید که نقطهٔ داده شده، $(1,-1,0,2)$، روی خط داده شده قرار ندارد (چرا؟)، پس خط و نقطه روی یک صفحه مستوی منحصر به فرد قرار می‌گیرند و می‌توان به روال هندسهٔ عادی فرض کرد کوتاهترین فاصله با رسم عمود از نقطه بر خط به‌دست می‌آید (اثباتی مستقیم از این مطلب در تمرین زیر آمده است). با فرض این مطلب برای یافتن پای عمود از $(1,-1,0,2)$ به خط داده شده، معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرا از $(1,-1,0,2)$ عمود بر $(2,1,-1,3)$ را می‌نویسیم و اشتراک آن را با خط پیدا می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع نزدیکترین نقطهٔ خط به $(1,-1,0,2)$ است. طبق (۷)، معادله

ابرصفحه مورد نظر هست:

$$۲(x_۱ - ۱) + (x_۲ + ۱) - x_۳ + ۳(x_۴ - ۲) = ۰$$

حال با جایگزینی از $\frac{x_۱}{۲} = \frac{x_۲ - ۱}{۱} = \frac{x_۳ + ۱}{-۱} = \frac{x_۴}{۳}$ در رابطهٔ بالا برحسب $x_۱$ داریم:

$$۲(x_۱ - ۱) + (\frac{x_۱}{۲} + ۲) + (\frac{x_۱}{۲} + ۱) + ۳(\frac{۳}{۲}x_۱ - ۲) = ۰$$

$$x_۱ = \frac{۲}{۳}$$

پس $x_۲ = \frac{۴}{۳}$، $x_۳ = -\frac{۴}{۳}$ و $x_۴ = ۱$، و نقطهٔ $(\frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۳}, -\frac{۴}{۳}, ۱)$ نزدیکترین نقطه خط به $(۱, -۱, ۰, ۲)$ می‌باشد که فاصله‌اش برابر مقدار زیر است:

$$\sqrt{(۱ - \frac{۲}{۳})^۲ + (-۱ - \frac{۴}{۳})^۲ + (\frac{۴}{۳})^۲ + (۲ - ۱)^۲} = \frac{۵}{\sqrt{۳}}$$

تمرین. فرض کنید در $\mathbb{R}^n$، l خط گذرا از a به موازات A است، $a = (a_۱, \ldots, a_n)$، $A = (A_۱, \ldots, A_n) \neq \underline{o}$ و $p = (p_۱, \ldots, p_n)$ یک نقطه در $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید به‌ازای نقطه منحصر به فردی q روی l نزدیکترین فاصله به p حاصل می‌شود و در واقع $q = a + \frac{(p-a)\cdot A}{A \cdot A}A$ (یعنی از نقطهٔ a روی l باید به اندازهٔ تصویر قائم $(p-a)$ روی A جدا کرد تا به نقطهٔ q رسید).

راهنمایی. معادلهٔ پارامتری خط l، $x_i = a_i + tA_i$، را در نظر بگیرید و مجذور فاصلهٔ p از نقطهٔ $a + tA$ را برحسب t بنویسید. عبارت به‌دست آمده، یک عبارت درجه ۲ برحسب t خواهد بود که با توجه به نقطهٔ مینیموم سهمی می‌توان t مطلوب را از آن محاسبه کرد.