ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ (۱)

تاکنون مفاهیم ابتدایی هندسه مانند نقطه، خط، صفحه و توازی را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌ایم. در هندسهٔ مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار رابطهٔ طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم "طول" و "زاویه" را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی را بنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر u, v دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند اغلب حاصل‌ضرب داخلی آنها، $u \cdot v$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = |u||v| \cos\alpha \qquad (۱)$$

که α زاویه بین u و v در $[0, \pi]$ است. با قرار دادن $u = v$، از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \qquad (۲)$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر $u \neq \underline{0}$ و $v \neq \underline{0}$، به طوری که زاویهٔ بین آنها، $\alpha \in [0, \pi]$، معنی داشته باشد، از (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \qquad (۳)$$

تابع کسینوس روی بازهٔ $[0, \pi]$ یک به یک است و همهٔ مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد

بازهٔ $[-۱, ۱]$ را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع معکوس $\cos^{-۱} : [-۱, ۱] \longrightarrow [۰, \pi]$ وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha = \cos^{-۱}(\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \qquad (۴)$$

بدین ترتیب مفهوم زاویهٔ بین دو بردار نیز به کمک (۴)از ضرب داخلی به‌دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل‌ضرب داخلی دو بردار را مستقل از "طول" و "زاویه" تعریف کرد، می‌توان با به‌کار گرفتن (۲) و (۴) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در واقع در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل‌ضرب داخلی به‌دست می‌آید (به کمک قضیهٔ مثلثاتی "قاعده کسینوس") که این خواست را برآورده می‌کند. اگر $u = (u_۱, u_۲)$ و $v = (v_۱, v_۲)$ ثابت می‌شود که:

$$u \cdot v = u_۱v_۱ + u_۲v_۲ \qquad (۵)$$

و نیز در $\mathbb{R}^۳$، برای $u = (u_۱, u_۲, u_۳)$ و $v = (v_۱, v_۲, v_۳)$:

$$u \cdot v = u_۱v_۱ + u_۲v_۲ + u_۳v_۳ \qquad (٦)$$

عبارت‌های جبری (۵) و (٦) تعریف زیر را در $\mathbb{R}^n$ القا می‌کنند:

(۹−۱) تعریف. برای $u = (u_۱, \ldots, u_n)$ و $v = (v_۱, \ldots, v_n)$، حاصل‌ضرب داخلی، $u \cdot v$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = u_۱v_۱ + \cdots + u_nv_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند:

(۹−۲) خواص ابتدایی حاصل‌ضرب داخلی

(۹−۲−۱) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$، $u \cdot v = v \cdot u$.

(۹−۲−۲) برای هر $u, v, w \in \mathbb{R}^n$، $u \cdot (v+w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$ و $(u+v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$.

(۹—۲—۳) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$، $(ru) \cdot v = r(u \cdot v)$ و $u \cdot (rv) = r(u \cdot v)$.

(۹—۲—۴) برای هر $u \in \mathbb{R}^n$، $u \cdot u \geq 0$ و $u \cdot u = 0$ اگر و تنها اگر $u = \underline{0}$.

با توجه به (۹—۲—۴) و با الهام از (۲)، طول $u \in \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \qquad (۷)$$

تنها nـ تایی دارای طول صفر، $\underline{0}$ است. برای $|u|$، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدرمطلق نیز به‌کار می‌رود. بعضی $|u|$ را به $\|u\|$ نمایش می‌دهند.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویهٔ بین u و v را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در $\mathbb{R}^n$، مقدار عبارت $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}}$ همواره در بازهٔ $[-1, 1]$ قرار دارد.

(۹—۳) **نامساوی کوشی‌ـ شوارتز** برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$|u \cdot v| \leq |u||v|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد.

اثبات. نخست حالتی را در نظر بگیرید که $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی است. اگر یکی از u و v صفر باشدکه دو طرف نامساوی بالا صفر می‌شود، در غیر این صورت $v = ru$ برای عدد حقیقی مناسب r. در این صورت هر دو طرف نامساوی به $|r||u|^2$ تبدیل می‌شود و تساوی برقرار است. حال فرض کنید $\{u, v\}$ مستقل خطی است، بالاخص $u \neq 0$ و $v \neq 0$. nـ تایی $xu + v$، $x \in \mathbb{R}$، را در نظر بگیرید. داریم $xu + v \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $v = -xu$ و وابستگی خطی ایجاد می‌شود. پس:

$(xu + v) \cdot (xu + v) > 0$ (طبق ۹—۲—۴)

$(xu) \cdot (xu) + (xu) \cdot v + v \cdot (xu) + (v \cdot v) > 0$ (با استفاده مکرر از ۹—۲—۲)

$(u \cdot u)x^2 + 2(u \cdot v)x + (v \cdot v)$ (با استفاده مکرر از ۹—۲—۳ و ۹—۲—۱)

این نامساوی درجهٔ دوم نسبت به x برای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u \cdot v)^2 - (u \cdot u)(v \cdot v) < 0$$

یا

$$|u \cdot v|^۲ < |u|^۲ |v|^۲$$

که نامساوی مورد نظر است. □

حال با توجه به نامساوی ثبت شده داریم

$$-۱ \leq \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \leq ۱$$

و یگانه مقدار واقع در $[۰, \pi]$ که کسینوس آن برابر $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}}$ است زاویهٔ بین u و v می‌نامیم:

$$\measuredangle(u, v) = \cos^{-۱} \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \qquad (۸)$$

قضیهٔ زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی‌ـ شوارتس نتیجه می‌شود:

(۹–۴) نامساوی مثلث برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از u و v مضربی نامنفی از دیگری باشد.

اثبات. کافی است نامساوی برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u + v|^۲ \leq |u|^۲ + |v|^۲ + ۲|u||v|$$

که معادل است با

$$(u + v) \cdot (u + v) \leq (u \cdot u) + (v \cdot v) + ۲|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u \cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v| \cos\measuredangle(u, v) \leq |u||v| \qquad \text{(طبق نتیجه نامساوی کوشی‌ـ شوارتس)}$$

اگر u و v صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر از دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطهٔ بالا معادل است با:

$$\cos\measuredangle(u,v) \leq ۱$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos\measuredangle(u,v) = ۱$، یعنی u و v همراستا و هم‌جهت باشند. □

برای دو عنصر u و v از $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $u \perp v$، و می‌گوییم u بر v عمود است در صورتی که $u \cdot v = ۰$. قضیهٔ فیثاغورس که پایهٔ هندسهٔ اقلیدسی است در $\mathbb{R}^n$ با تعاریف طول و زاویهٔ ذکر شده برقرار است:

(۹—۵) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $u, v \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $u \perp v$، آنگاه:

$$|u+v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$$

اثبات. عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u+v)\cdot(u+v) = (u\cdot u) + (v\cdot v)$$

نوشت که با توجه به $u \cdot v = ۰$ برقرار است. □

توجه کنید که با همین استدلال (یا جایگزینی $v-$ به جای v)، رابطهٔ $|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$ نیز تحت فرض $u \cdot v = ۰$ برقرار است. در $\mathbb{R}^n$ نیز، مانند $\mathbb{R}^۲$، قضیهٔ فیثاغورس به شکل $|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$ حالت خاص قاعدهٔ کسینوس است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \qquad \text{برای هر } v \neq \underline{۰}, u \neq \underline{۰} \qquad (۹)$$

این نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبهٔ بالا با استفاده از (۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |u-v|^{۲} &= (u-v)\cdot(u-v) \\ &= |u|^{۲}+|v|^{۲}-۲(u\cdot v) \\ &= |u|^{۲}+|v|^{۲}-۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \qquad \text{(طبق (۸))} \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه $x=(x_۱,\ldots,x_n)$ و $y=(y_۱,\ldots,y_n)$ دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصلهٔ x از y، که گاهی به $d(x,y)$ نمایش داده می‌شود، برابر $|x-y|$ تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز ارائه کنیم:

(۹—۶) نامساوی مثلث. برای x,y,z در $\mathbb{R}^n$:

$$|y-z|\le|y-x|+|x-z|$$

(۹—۷) قضیهٔ فیثاغورث. هرگاه برای x,y,z در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $(x-y)\perp(x-z)$، آنگاه:

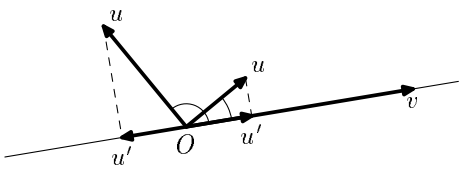
$$|y-z|^{۲}=|y-x|^{۲}+|z-x|^{۲}$$

(۹—۸) قاعدهٔ کسینوس. برای هر x,y,z در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$|y-z|^{۲}=|y-x|^{۲}+|z-x|^{۲}-۲|y-x||z-x|\cos\measuredangle(y-x,z-x)$$

هر یک از این روابط با جایگزینی در رابطهٔ متناظر به‌دست می‌آید. در (۹—۶) بنویسید $u=y-x$ و $v=x-z$، آنگاه $u+v=y-z$. در مورد (۹—۷) و (۹—۸)، می‌نویسیم $u=y-x$ و $v=z-x$، آنگاه $u-v=y-z$.

(۹—۹) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می‌آورد (شکل ۱).



شکل ۱

اگر $v \neq ۰$ و u در $\mathbb{R}^۳$ باشند، u'، تصویر قائم u بر راستای v، برداری است که طول آن برابر $|u||\cos\measuredangle(u,v)|$ است (در حالتی که $u = ۰$، این طول برابر صفر در نظر گرفته می‌شود هرچند که زاویهٔ بین u, v تعریف نشده است)، u' مضربی از v است، $u' = ru$، و علامت r با علامت کسینوس زاویهٔ بین u و v یکی است. بدین ترتیب اگر $\frac{v}{|u|}$ بردار واحد در جهت v باشد، می‌توان نوشت:

$$u' = |u|\cos\measuredangle(u,v)\frac{v}{|v|} \qquad (۱۰)$$

یا معادلاً:

$$u' = \frac{u\cdot v}{|v|^۲}v \qquad (۱۱)$$

با توجه به این که عبارت‌های سمت راست (۱۱)همه در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند، می‌توانیم تصویر قائم u بر $v \neq ۰$ در $\mathbb{R}^n$ را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که v یک بردار واحد باشد:

$$|v| = ۱ \text{ اگر } \quad u' = (u\cdot v)v \qquad (۱۲)$$

مثال. پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$، یعنی $e_۱,\ldots,e_n$ را در نظر بگیرید. هر $x = (x_۱,\ldots,x_n)$ را می‌توان به صورت:

$$x = x_۱e_۱ + \cdots + x_ne_n$$

نوشت. در واقع $x_i e_i$ تصویر قائم x بر راستای e_i (محور i ام) است:

$$(x \cdot e_i)e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)e_i \qquad (۱۳)$$

در جلسهٔ بعد حالت کلی‌تر این نمایش را بررسی می‌کنیم.