ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $I\!R^n$ (۱)

تاکنون مفاهیم ابتدایی هندسه مانند نقطه، خط، صفحه و توازی را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌ایم. در هندسهٔ مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار رابطهٔ طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم "طول" و "زاویه" را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی را بنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر u, v دو بردار در $\mathbb{R}^۳$ باشند اغلب حاصل‌ضرب داخلی آنها، $u \cdot v$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha \tag{۱}$$

که α زاویه بین u و v در $[۰, \pi]$ است. با قرار دادن $u = v$، از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \tag{۲}$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر $u \neq \underline{۰}$ و $v \neq \underline{۰}$، به طوری که زاویهٔ بین آنها، $\alpha \in [۰, \pi]$، معنی داشته باشد، از (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \tag{۳}$$

تابع کسینوس روی بازهٔ $[۰, \pi]$ یک به یک است و همهٔ مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد

بازهٔ $[-1,1]$ را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع معکوس $[0,\pi] \longrightarrow [-1,1] : \cos^{-1}$ وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha = \cos^{-1}(\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \qquad (4)$$

بدین ترتیب مفهوم زاویهٔ بین دو بردار نیز به کمک (۴)از ضرب داخلی به‌دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل‌ضرب داخلی دو بردار را مستقل از "طول" و "زاویه" تعریف کرد، می‌توان با به‌کار گرفتن (۲) و (۴) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در واقع در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل‌ضرب داخلی به‌دست می‌آید (به کمک قضیهٔ مثلثاتی "قاعده کسینوس") که این خواست را برآورده می‌کند. اگر $u = (u_1, u_2)$ و $v = (v_1, v_2)$ ثابت می‌شود که:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \qquad (5)$$

و نیز در $\mathbb{R}^3$، برای $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \qquad (6)$$

عبارت‌های جبری (۵) و (٦) تعریف زیر را در $\mathbb{R}^n$ القا می‌کنند:

(۹—۱) تعریف. برای $u = (u_1, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, \ldots, v_n)$، حاصل‌ضرب داخلی، $u \cdot v$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند:

(۹—۲) خواص ابتدایی حاصل‌ضرب داخلی

(۹—۲—۱) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$، $u \cdot v = v \cdot u$.

(۹—۲—۲) برای هر $u, v, w \in \mathbb{R}^n$، $u \cdot (v+w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$ و $(u+v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$.

(۹ـ۲ـ۳) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$، $(ru) \cdot v = r(u \cdot v)$ و $u \cdot (rv) = r(u \cdot v)$.

(۹ـ۲ـ۴) برای هر $u \in \mathbb{R}^n$، $u \cdot u \geq ۰$ و $u \cdot u = ۰$ اگر و تنها اگر $u = \underline{۰}$.

با توجه به (۹ـ۲ـ۴) و با الهام از (۲)، طول $u \in \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \qquad (۷)$$

تنها nـ تایی دارای طول صفر، $\underline{۰}$ است. برای $|u|$، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدرمطلق نیز به‌کار می‌رود. بعضی $|u|$ را به $\|u\|$ نمایش می‌دهند.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویهٔ بین u و v را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در $\mathbb{R}^n$، مقدار عبارت $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}}$ همواره در بازهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد.

(۹ـ۳) نامساوی کوشی‌ـ شوارتز برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$|u \cdot v| \leq |u||v|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد.

اثبات. نخست حالتی را در نظر بگیرید که $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی است. اگر یکی از u و v صفر باشدکه دو طرف نامساوی بالا صفر می‌شود، در غیر این صورت $v = ru$ برای عدد حقیقی مناسب r. در این صورت هر دو طرف نامساوی به $|r||u|^۲$ تبدیل می‌شود و تساوی برقرار است. حال فرض کنید $\{u, v\}$ مستقل خطی است، بالاخص $u \neq ۰$ و $v \neq ۰$. nـ تایی $xu + v$، $x \in \mathbb{R}$، را در نظر بگیرید. داریم $xu + v \neq ۰$ زیرا در غیر این صورت $v = -xu$ و وابستگی خطی ایجاد می‌شود. پس:

$(xu + v) \cdot (xu + v) > ۰$ (طبق ۹ـ۲ـ۴)

$(xu) \cdot (xu) + (xu) \cdot v + v \cdot (xu) + (v \cdot v) > ۰$ (با استفاده مکرر از ۹ـ۲ـ۲)

$(u \cdot u)x^۲ + ۲(u \cdot v)x + (v \cdot v)$ (با استفاده مکرر از ۹ـ۲ـ۳ و ۹ـ۲ـ۱)

این نامساوی درجهٔ دوم نسبت به x برای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u \cdot v)^۲ - (u \cdot u)(v \cdot v) < ۰$$

یا

$$|u \cdot v|^{۲} < |u|^{۲}|v|^{۲}$$

که نامساوی مورد نظر است. $\square$

حال با توجه به نامساوی ثبت شده داریم

$$-۱ \leq \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \leq ۱$$

و یگانه مقدار واقع در $[\circ, \pi]$ که کسینوس آن برابر $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}}$ است زاویهٔ بین u و v می‌نامیم:

$$\measuredangle(u, v) = \cos^{-۱} \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \tag{۸}$$

قضیهٔ زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی ـ شوارتس نتیجه می‌شود:

(۴ــ۹) نامساوی مثلث برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از u و v مضربی نامنفی از دیگری باشد.

اثبات. کافی است نامساوی برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u + v|^{۲} \leq |u|^{۲} + |v|^{۲} + ۲|u||v|$$

که معادل است با

$$(u + v) \cdot (u + v) \leq (u \cdot u) + (v \cdot v) + ۲|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u \cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v| \cos \measuredangle(u, v) \leq |u||v| \quad \text{(طبق نتیجه نامساوی کوشی ـ شوارتس)}$$

اگر u و v صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر از دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطهٔ بالا معادل است با:

$$\cos \measuredangle(u, v) \leq ۱$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos \measuredangle(u, v) = ۱$، یعنی u و v همراستا و هم‌جهت باشند. $\square$

برای دو عنصر u و v از $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $u \perp v$، و می‌گوییم u بر v عمود است در صورتی که $u \cdot v = ۰$. قضیهٔ فیثاغورس که پایهٔ هندسهٔ اقلیدسی است در $\mathbb{R}^n$ با تعاریف طول و زاویهٔ ذکر شده برقرار است:

(۹—۵) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $u, v \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $u \perp v$، آنگاه:

$$|u + v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$$

اثبات. عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u + v) \cdot (u + v) = (u \cdot u) + (v \cdot v)$$

نوشت که با توجه به $u \cdot v = ۰$ برقرار است. $\square$

توجه کنید که با همین استدلال (یا جایگزینی $-v$ به جای v)، رابطهٔ $|u - v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$ نیز تحت فرض $u \cdot v = ۰$ برقرار است. در $\mathbb{R}^n$ نیز، مانند $\mathbb{R}^۲$، قضیهٔ فیثاغورس به شکل $|u - v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$ حالت خاص قاعدهٔ کسینوس است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|u - v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v| \cos \measuredangle(u, v) \quad \text{برای هر } u \neq \underline{۰}, v \neq \underline{۰} \qquad (۹)$$

این نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبهٔ بالا با استفاده از (۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |u-v|^{۲} &= (u-v)\cdot(u-v) \\ &= |u|^{۲}+|v|^{۲}-۲(u\cdot v) \\ &= |u|^{۲}+|v|^{۲}-۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \qquad (\text{طبق } (۸)) \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه $x=(x_۱,\dots,x_n)$ و $y=(y_۱,\dots,y_n)$ دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصلهٔ x از y، که گاهی به $d(x,y)$ نمایش داده می‌شود، برابر $|x-y|$ تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز ارائه کنیم:

(۹—۶) نامساوی مثلث. برای x,y,z در $\mathbb{R}^n$:

$$|y-z|\le|y-x|+|x-z|$$

(۹—۷) قضیهٔ فیثاغورث. هرگاه برای x,y,z در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $(x-z)\perp(x-y)$، آنگاه:

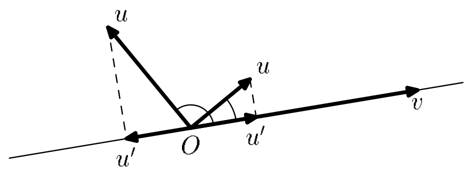
$$|y-z|^{۲}=|y-x|^{۲}+|z-x|^{۲}$$

(۹—۸) قاعدهٔ کسینوس. برای هر x,y,z در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$|y-z|^{۲}=|y-x|^{۲}+|z-x|^{۲}-۲|y-x||z-x|\cos\measuredangle(y-x,z-x)$$

هر یک از این روابط با جایگزینی در رابطهٔ متناظر به‌دست می‌آید. در (۹—۶) بنویسید $u=y-x$ و $v=x-z$، آنگاه $u+v=y-z$. در مورد (۹—۷) و (۹—۸)، می‌نویسیم $u=y-x$ و $v=z-x$، آنگاه $u-v=y-z$.

(۹—۹) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می‌آورد (شکل ۱).



شکل ۱

اگر $v \neq \underline{\circ}$ و u در $\mathbb{R}^{۳}$ باشند، u'، تصویر قائم u بر راستای v، برداری است که طول آن برابر $||u|\cos\measuredangle(u,v)|$ است (در حالتی که $u=\underline{\circ}$، این طول برابر صفر در نظر گرفته می‌شود هرچند که زاویهٔ بین u, v تعریف نشده است)، u' مضربی از v است، $u' = ru$، و علامت r با علامت کسینوس زاویهٔ بین u و v یکی است. بدین ترتیب اگر $\frac{v}{|u|}$ بردار واحد در جهت v باشد، می‌توان نوشت:

$$u' = |u|\cos\measuredangle(u,v)\frac{v}{|v|} \qquad (۱۰)$$

یا معادلاً:

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^{۲}}v \qquad (۱۱)$$

با توجه به این که عبارت‌های سمت راست (۱۱)همه در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند، می‌توانیم تصویر قائم u بر $v \neq \underline{\circ}$ در $\mathbb{R}^n$ را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که v یک بردار واحد باشد:

$$u' = (u \cdot v)v \quad \text{اگر} \quad |v| = ۱ \qquad (۱۲)$$

مثال. پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$، یعنی $e_{۱}, \ldots, e_n$ را در نظر بگیرید. هر $x = (x_{۱}, \ldots, x_n)$ را می‌توان به صورت:

$$x = x_{۱}e_{۱} + \cdots + x_n e_n$$

نوشت. در واقع $x_i e_i$ تصویر قائم x بر راستای e_i (محور i ام) است:

$$(x \cdot e_i)e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)e_i \tag{۱۳}$$

در جلسهٔ بعد حالت کلی‌تر این نمایش را بررسی می‌کنیم.