زیرفضاهای مستوی (۲)

در پایان جلسه قبل به تعدادی سؤال بنیادی در مورد تعریف زیرفضای مستوی kـ بعدی اشاره کردیم که قرار شد به پاسخگویی کامل آنها اقدام کنیم. قضیهٔ زیر و روش اثبات آن کلید این بحث است.

(۸—۱) قضیهٔ تبادل. فرض کنید $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ و $\{B_۱, \ldots, B_l\}$ دو زیرمجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند به طوری که $\langle B_۱, \ldots, B_l \rangle = \langle A_۱, \ldots, A_k \rangle$، در این صورت $l = k$.

اثبات. نشان می‌دهیم $l \neq k$ منجر به تناقض می‌شود. مثلاً فرض کنید $k \leq l$. چون $B_۱ \in \langle B_۱, \ldots, B_l \rangle = \langle A_۱, \ldots, A_k \rangle$، می‌توان نوشت:

$$B_۱ = t_۱ A_۱ + \cdots + t_k A_k \tag{۱}$$

دست کم یکی از ضرایب $t_۱, \ldots, t_n$ باید ناصفر باشد چه در غیر این صورت $B_۱ = \underline{\circ}$ و مجموعهٔ $\{B_۱, \ldots, B_l\}$ نمی‌تواند مستقل خطی باشد. مثلاً فرض می‌کنیم $t_۱ \neq \circ$ (در صورت لزوم اندیس‌ها را تعویض کنید به طوری که ضریب با اندیس ۱ ناصفر باشد)، پس با تبادل جای $B_۱$ و $t_۱ A_۱$ در دو طرف (۱) داریم:

$$\begin{aligned} -t_۱ A_۱ &= -B_۱ + t_۲ A_۲ + \cdots + t_k A_k \\ A_۱ &= \tfrac{۱}{t_۱} B_۱ - \tfrac{t_۲}{t_۱} A_۲ - \cdots - \tfrac{t_k}{t_۱} A_k \end{aligned} \tag{۲}$$

از (۲) نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی $A_۱, \ldots, A_k$، یعنی هر عنصر $\langle A_۱, \ldots, A_k \rangle$، ترکیبی خطی از $\{B_۱, A_۲, \ldots, A_k\}$ است. حال عنصر $B_۲ \in \langle B_۱, \ldots, B_l \rangle = \langle A_۱, \ldots, A_k \rangle$ را در نظر می‌گیریم.

چون ثابت کرده‌ایم هر عنصر $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle$ ترکیبی خطی از $\{B_1, A_2, \ldots, A_k\}$ است، می‌توان نوشت:

$$B_2 = s_1 B_1 + s_2 A_2 + \cdots + s_k A_k \tag{3}$$

در اینجا همهٔ ضرایب $s_2, \ldots, s_k$ نمی‌توانند صفر باشند زیرا در این صورت $B_2 = s_1 B_1$ و مجموعه $\{B_1, \ldots, B_l\}$ مستقل خطی خواهد بود که خلاف فرض قضیه است. پس دست کم یکی از $s_2, \ldots, s_k$ صفر نیست که مثلاً (با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم) فرض می‌کنیم $s_2 \neq 0$. پس مجدداً با تبادل مکان B_2 و $s_2 A_2$ داریم:

$$\begin{aligned} -s_2 A_2 &= s_1 B_1 - B_2 + s_3 A_3 + \cdots + t_k A_k \\ A_2 &= -\tfrac{s_1}{s_2} B_1 + \tfrac{1}{s_2} B_2 - \tfrac{s_3}{s_2} A_3 - \cdots - \tfrac{s_k}{s_2} A_k \end{aligned} \tag{4}$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر ترکیب خطی $B_1, A_2, \ldots, A_k$ (در نتیجه هر ترکیب خطی $A_1, \ldots, A_k$) ترکیبی خطی از $\{B_1, B_2, A_3, \ldots, A_k\}$ است. به همین روش ادامه داده، تک تک A_i ها را با B_i ها مبادله می‌کنیم. از آنجا که $k \leq l$، پس از k مرحله به این نتیجه می‌رسیم که هر ترکیب خطی $A_1, \ldots, A_k$ یک ترکیب خطی $B_1, \ldots, B_k$ است. از آنجا که $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle = \langle B_1, \ldots, B_l\rangle$، اگر l اکیداً بزرگتر از k باشد، B_{k+1} باید ترکیبی خطی از $B_1, \ldots, B_k$ باشد که این خلاف استقلال خطی $\{B_1, \ldots, B_l\}$ است. نتیجه این که $l = k$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

قضیه تبادل نشان می‌دهد که اگر یک زیرفضای خطی E° متشکل از ترکیب‌های خطی یک مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ باشد، هر مجموعهٔ مستقل خطی دیگر که ترکیب‌های خطی عناصر آن همین مجموعه را ایجاد کند باید دارای دقیقاً k عضو باشد. بدین ترتیب عدد k، که از این پس بعد زیرفضای خطی $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle$ خوانده خواهد شد عددی است که به طور ذاتی بر این زیرفضای خطی تحمیل می‌شود. هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی kـ عضوی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ از عناصر E° را یک پایه برای E می‌نامیم. اگر زیرفضای مستوی $E = \langle a; A_1, \ldots, A_k\rangle$ از انتقال زیرفضای

خطی $\langle A_1,\dots,A_k\rangle$ به‌دست آمده باشد، بعد E را نیز k می‌گیریم. اکنون می‌توانیم گزاره‌ای مشابه (۶—۴) در حالت کلی ارائه کنیم:

(۸—۲) **گزاره.** اگر $\{A_1,\dots,A_k\}$ مستقل خطی باشد، $E=\langle a;A_1,\dots,A_k\rangle$، $\{B_1,\dots,B_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\langle A_1,\dots,A_k\rangle = E^\circ$، و $b\in E$، آنگاه $E=\langle b;B_1,\dots,B_k\rangle$.

اثبات. چون $b\in E$، داریم

$$b=a+t_1A_1+\cdots+t_kA_k \qquad (5)$$

برای اعداد حقیقی مناسب $t_1,\dots,t_k$. از طرفی دیگر دیدیم که هر ترکیب خطی $\{A_1,\dots,A_k\}$ یک ترکیب خطی $\{B_1,\dots,B_k\}$ است، و بالعکس این امر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$s_1A_1+\cdots+s_kA_k=s'_1B_1+\cdots+s'_kB_k \qquad (6)$$

بنابراین اگر $x\in\langle a;A_1,\dots,A_k\rangle$، داریم:

$$\begin{aligned} x &= a+s_1A_1+\cdots+s_kA_k \\ &= b+(s_1-t_1)A_1+\cdots+(s_k-t_k)A_k \quad (\text{طبق } 5) \end{aligned}$$

و طبق (۶) می‌توان $(s_1-t_1)A_1+\cdots+(s_k-t_k)A_k$ را به صورت ترکیبی خطی از $B_1,\dots,B_k$ نوشت، پس $x\in\langle b;B_1,\dots,B_k\rangle$. بالعکس اگر $y\in\langle b;B_1,\dots,B_k\rangle$، آنگاه:

$$y=b+r'_1B_1+\cdots+r'_kB_k \quad , \quad r'_1,\dots,r'_k \text{ برای اعداد حقیقی مناسب}$$

ترکیب خطی $r'_1B_1+\cdots r'_kB_k$ را می‌توان طبق (۶) به صورت $r_1A_1+\cdots+r_kA_k$ نوشت، پس به کمک (۵):

$$y=a+(t_1+r_1)A_1+\cdots+(t_k+r_k)A_k$$

یعنی $y\in\langle a;A_1,\dots,A_k\rangle$، و حکم به اثبات می‌رسد. □

گزاره زیر نیز مشابه (۶−۵) است:

(۸−۳) گزاره. فرض کنید زیرفضاهای مستوی kـ بعدی E_1 و E_2 در $\mathbb{R}^n$ دارای $(k+1)$ نقطهٔ مشترک باشند که در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k در $\mathbb{R}^n$ قرار نمی‌گیرند، آنگاه $E_1 = E_2$.

اثبات. فرض کنید $P_0, P_1, \ldots, P_k$ نقاط مشترک E_1, E_2 باشند. اگر $\{A_1, \ldots, A_k\}$ یک پایه برای E_1° باشد، عناصر E_1 را می‌توان به صورت

$$P_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$$

نمایش داد. حال چون $P_1, \ldots, P_k \in E$، هر یک به صورت فوق نوشته می‌شود، پس $P_1 - P_0, \ldots, P_k - P_0$ هر یک ترکیبی خطی از $A_1, \ldots, A_k$ است. می‌نویسیم $P'_1 = P_1 - P_0, \ldots P'_k = P_k - P_0$. حال ادعا می‌کنیم $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ مستقل خطی است. نشان می‌دهیم فرض وابستگی خطی $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ منجر به تناقض با این فرض گزاره می‌شود که $P_0, P_1, \ldots, P_k$ در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k جای نمی‌گیرند. اگر $k = 1$ که در حالت گزاره (۶−۵) هستیم که قبلاً ثابت شده است، پس فرض می‌کنیم $k > 1$. حال فرض کنید $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ وابستهٔ خطی است. دست کم یکی از $P'_1, \ldots, P'_k$ ناصفر است زیرا اگر همهٔ اینها صفر باشند داریم $P_0 = P_1 = \cdots = P_k$ پس $\{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$ در یک زیرفضای مستوی صفر بعدی $\mathbb{R}^n$ قرار می‌گیرد که خلاف فرض است. بدین ترتیب $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ دارای حداقل یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی است (یک تک عنصری ناصفر). بزرگترین زیرمجموعه (از نظر تعداد اعضا) از $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ را در نظر می‌گیریم که مستقل خطی است، تعداد اعضای آن را l می‌نامیم. چنین زیرمجموعهٔ $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ ممکن است منحصر به فرد نباشد و لیکن به هر حال $l < k$ زیرا $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ وابستهٔ خطی فرض شده است. با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم، فرض می‌کنیم $\{P'_1, \ldots, P'_l\}$ این زیرمجموعهٔ مستقل خطی دارای بیشترین تعداد ممکن عضو باشد. زیرفضای خطی ایجاد شده توسط $P'_1, \ldots, P'_l$ را F° می‌نامیم، $F^\circ = \langle P'_1, \ldots, P'_l \rangle$. داریم $P_{l+1}, \ldots, P_k \in F^\circ$ زیرا که افزودن هر یک به $\{P'_1, \ldots, P'_l\}$

وابستگی خطی ایجاد می‌کند. F° یک زیرفضای خطی lـ بعدی است، $l \leq k$، و اگر آن را با $P_\circ$ انتقال دهیم، یک زیرمجموعهٔ مستوی lـ بعدی F به‌دست می‌آید:

$$F = \langle P_\circ; P'_1, \ldots, P'_l \rangle$$

که $P_\circ$، $P_1 = P_\circ + P'_1$، ...، $P_k = P_\circ + P'_k$ همه عضو آن هستند. چون $l < k$، این خلاف فرض گزاره است. نتیجه این که وابستگی خطی $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ منجر به تناقض شد و این مجموعه باید مستقل خطی باشد. بنابراین $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ یک پایه برای E_1° است و طبق گزارهٔ (۸−۲) داریم

$$E_1 = \langle P_\circ; P'_1, \ldots, P'_k \rangle$$

چون $P_\circ, P_1, \ldots, P_k \in E_2$، عین همین استدلال برای E_2 نیز کار می‌کند و نتیجه می‌شود که:

$$E_2 = \langle P_\circ; P'_1, \ldots, P'_k \rangle$$

و $E_1 = E_2$ نتیجه می‌شود. □

مفهوم توازی را که برای خط و صفحه تعریف کردیم می‌توانیم به زیرفضاهای مستوی از هر بعد تعمیم دهیم. فرض کنید E_1, E_2 دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند. می‌گوییم E_1, E_2 موازی هستند، و می‌نویسیم $E_1 \| E_2$، در صورتی که اشتراک E_1, E_2 تهی باشد و برای انتقال یافته‌های آنها به مبدأ، یعنی E_1°, E_2°، داشته باشیم $E_1^\circ \subset E_2^\circ$ یا $E_2^\circ \subset E_1^\circ$.

مثال. وضعیت نسبی خط راست $l : \frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{\circ} = \frac{x_4 - 1}{1} = \frac{x_5 + 2}{-1}$ را با زیرفضای سه بعدی $E = \langle e_3; e_1, e_4, e_5 \rangle$ از $\mathbb{R}^5$ بررسی کنید. عناصر E به شکل $(x_1, \circ, 1, x_4, x_5)$ هستند، و برای نقاط l، مؤلفه سوم صفر است، پس $l \cap E$ تهی است. داریم $l^\circ : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{\circ} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_5}{-1}$ و $E^\circ = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$، یعنی مؤلفه‌های دوم و سوم عناصر E° باید صفر باشد. حال نقطهٔ $(1, 2, \circ, 1, -1)$ روی l° قرار دارد ولی در E° نیست، پس $l^\circ \not\subset E^\circ$. از طرفی دیگر $E^\circ \not\subset l^\circ$ زیرا که بعد E° از بعد l° بزرگتر است. پس E و l موازی نیستند. E و l را مثل گذشته متنافر می‌نامیم.