فضای حقیقی nـ بعدی

در جلسات قبل درس مروری بر مفهوم عدد و تحول آن از اعداد صحیح شمارشی تا اعداد مختلط داشتیم. ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسی "عدد" و "فضا" بنا شده است. علوم حساب و جبر از عدد نشأت می‌گیرند و هندسه، به مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضا است. بسیاری اوقات می‌توان با یک پدیده دو برخورد متمایز ریاضی، یکی جبری‌ـ عددی، و دیگری هندسی، داشت. در برخورد جبری اغلب یک چارچوب کلی برای حل مسائل مشابه ارائه می‌شود که گاهی نیز منجر به فراهم ساختن یک الگوریتم یا دستورالعمل زنجیره‌ای برای حل این‌گونه مسائل می‌شود. در برخورد هندسی، که ریشه در نیروی باصرهٔ انسان دارد، سعی بر این است که جمیع روابط موجود بین اجزاء یک پدیده یکجا مورد بررسی قرار گیرد، خصوصیات برجسته شناسایی شده و حل مسأله از این مشاهدات پدیدار شود. به ذکر دو مثال ابتدایی می‌پردازیم:

مثال ۱. می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع شود یک مجذور کامل است. در واقع:

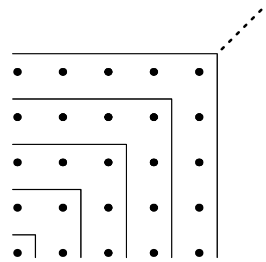
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{1}$$

یک روش جبری‌ـ عددی برای اثبات این ادعا استقراء است. حکم برای $n = 1$ صحیح است و اگر فرض کنیم (۱) برای n برقرار است، نشان می‌دهیم برای $(n + 1)$ نیز برقرار است:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

برخورد هندسی با همین حکم در شکل ۱ دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به صورت لایه‌هایی از گوشهٔ چپ پایین افزوده می‌شوند و همواره یک مربع به ضلع n پدید می‌آید:



شکل ۱

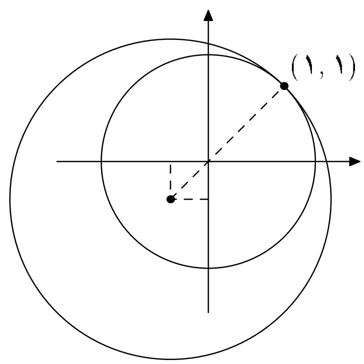
مثال ۲.می‌خواهیم در مورد تعداد جواب‌های دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۲ \\ x^۲+y^۲+x+y=۴ \end{cases} \tag{۲}$$

نخست مسأله را از دیدگاه جبری بررسی می‌کنیم. با تفریق دو رابطه داریم $x+y=۲$. اگر $y=۲-x$ را در معادلهٔ اول جایگزین کنیم نتیجه می‌شود که $۲x^۲-۴x+۲=۰$ یا $x^۲-۲x+۱=۰$، پس $x=۱$. با جایگزینی در معادلهٔ اول داریم $y=\pm ۱$ ولی فقط جواب $y=۱$ در معادله دوم صدق می‌کند، پس تنها جواب مسأله $(x,y)=(۱,۱)$ است. یک دیدگاه هندسی برای بررسی این مسأله می‌تواند توجه به مکان هندسی دو معادله در صفحه xy باشد. دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۲ \\ (x+\frac{۱}{۲})^۲+(y+\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۹}{۲} \end{cases}$$

معادله اول دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ به مرکز $(۰,۰)$ را نمایش می‌دهد و معادله دوم یک دایره به شعاع $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ به مرکز $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$. توجه می‌کنیم که فاصله مرکز دایره‌ها برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است، پس دورترین نقطهٔ دایرهٔ اول از مرکز دایرهٔ دوم نقطهٔ $(۱,۱)$ به فاصلهٔ $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ است. نتیجه این که دو دایره بر هم مماس هستند و نقطهٔ تماس $(۱,۱)$ می‌باشد که تنها جواب مسأله است.



شکل ۲

توجه کنید که هرچند در راه حل هندسی نیز عملیات جبری انجام شد، لیکن این عملیات به منظورهای خاصی بودند که دیدگاه هندسی مبتنی بر شناخت شکل مدور مکان‌های هندسی القاء می‌کرد. برای اشکال نامأنوس یا وقتی که مقایسهٔ طول شعاع دایرهٔ دوم با فاصله دورترین (نزدیکترین) نقطهٔ دایرهٔ اول به مرکز دایرهٔ دوم آسان نباشد، تحلیل جبری اجتناب‌ناپذیر است، ولی هرجا که دیدگاه هندسی مقدور باشد، معمولاً یک بینش روشن‌کننده نسبت به نکات اصلی مسأله ایجاد می‌شود.

نکته مهم دیگر در مورد مسأله بالا این که تعداد متغیرهای مسأله در اینجا ۲ است که بررسی هندسی آن را در صفحهٔ xy ممکن می‌سازد. برای مسائل سه متغیری نیز می‌توان از تجسم هندسی بهره جست. اما در بسیاری مسائل ریاضی و کاربردی، تعداد متغیرهای ذی دخل بیش از ۳ است که ظاهراً مانعی چاره‌ناپذیر در راه ارائه دیدگاه هندسی است زیرا که انسان به عنوان موجود سه بعدی هیچ گونه برداشت ادراکی مستقیم از ابعاد بالاتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما در این جلسه و چند جلسهٔ آینده فراهم آوردن نوعی هندسه nـ بعدی است که در آن n به اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان یک زبان ریاضی مناسب برای تعمیم شهود هندسی فرای ابعاد ۲ و ۳ تلقی کرد که همانند نیروی باصره در سوق دادن تفکر ریاضی به یافتن روش مناسب برای حل مسائل کارساز است. در اینجا هیچ‌گونه ادعایی برای "وجود" فیزیکی فضای nـ بعدی مطرح نیست، بلکه یک نظام دقیق ریاضی مطرح خواهد شد که بستر مناسبی برای نوعی تجسم و شهود، هرچند مجازی، در ابعاد بالاتر از ۳ است.

رهنمود ما برای ساختن فضای nـ بعدی ارتباط جبر و هندسه در هندسهٔ تحلیلی است. دیدیم که اولین ارتباط جبر و هندسه از نسبت دادن یک عدد (یعنی "طول") به پاره‌خط‌ها آغاز می‌شود، یعنی در تناظر قرار دادن نقاط یک خط راست با مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$. در هندسهٔ تحلیلی، نقاط یک صفحه با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^۲$، و نقاط فضا با سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^۳$، مدرج می‌شوند. تا اینجا جبر و هندسه مستقل از یکدیگر در ذهن ما وجود دارند و هندسهٔ تحلیلی یک پل ارتباطی است. برای $n \geq ۴$، nـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی معنی دارند ولی هندسه‌ای فرای فضای عادی سه بعدی نمی‌شناسیم. با الهام گرفتن از ارتباط فوق مفاهیم هندسی را برای $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعهٔ nـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب نوعی هندسه در $\mathbb{R}^n$ بنا می‌شود.

با این مقدمه، $\mathbb{R}^n$، مجموعهٔ n تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی اشیاء ریاضی $x = (x_۱, \ldots, x_n)$، هر x_i: عدد حقیقی، را در نظر می‌گیریم و هر چنین x را یک نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم. نخست یک عمل جمع در $\mathbb{R}^n$ مشابه جمع بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ تعریف می‌کنیم. برای $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_n)$، $x + y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x + y = (x_۱ + y_۱, \ldots, x_n + y_n) \qquad (۳)$$

(۶—۱) خواص جمع

(۶—۱—۱) خاصیت تعویض‌پذیری (جابجایی): $x + y = y + x$.

(۶—۱—۲) خاصیت شرکت‌پذیری $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(۶—۱—۳) عنصر بی‌اثر: n تایی $(۰, \ldots, ۰) = \underline{۰}$ (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x + \underline{۰} = \underline{۰} + x = x$$

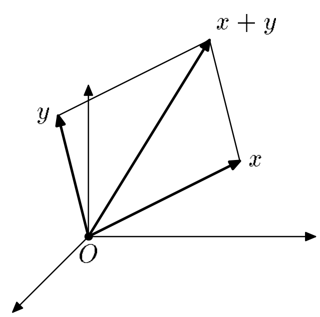
(۶—۱—۴) عنصر قرینه: برای n تایی داده شده $x = (x_۱, \ldots, x_n)$، n تایی "$-x$" که به صورت

$-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$ تعریف می‌شود (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x + (-x) = (-x) + x = \underline{0}$$

خواص فوق همه به سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند.

تعریف جمع n تایی‌ها و خواص بالا عیناً از حالت دو بعدی و سه بعدی برگرفته شده‌اند. اگر به نقاط $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$ در $\mathbb{R}^3$، بردارهای ساطع از $\underline{0}$ به این نقاط را منسوب کنیم، $x + y$ مفهوم مجموع برداری معمول را دارد یعنی رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی که سه رأس دیگر آن نقاط $\underline{0}$، x و y هستند.

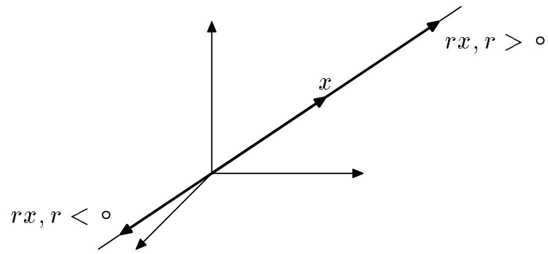


شکل ۳

برای بردارها در صفحه و فضای سه بعدی حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ نیز تعریف کرد. برای نقطهٔ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و عدد حقیقی $r \in \mathbb{R}$، نقطهٔ rx به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$rx = (rx_1, \ldots, rx_n) \tag{۴}$$

یعنی همهٔ مؤلفه‌های x در r ضرب می‌شوند. تعبیر این عمل در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم. اگر بردار واصل از $\underline{0}$ به x را در نظر بگیریم، rx برداری در همان راستاست که اگر r مثبت باشد همجهت با x و اگر r منفی باشد در جهت مقابل است



شکل ۴

خواص ابتدایی زیر را در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع ثبت می‌کنیم. همهٔ این احکام نتیجهٔ سرراست تعریف هستند:

(۶—۲) خواص ضرب در اعداد

(۶—۲—۱) برای هر نقطهٔ x، $1x = x$.

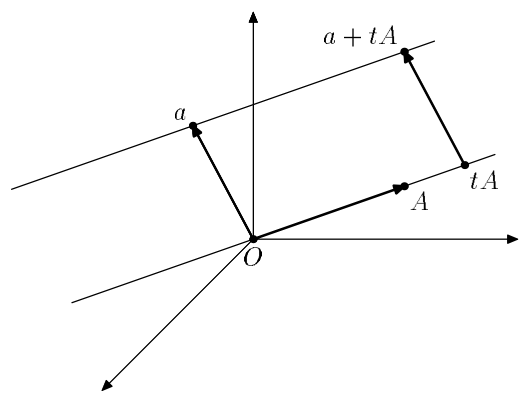
(۶—۲—۲) اگر r, s اعداد حقیقی باشند و x یک نقطه، $(rs)x = r(sx)$.

(۶—۲—۳) اگر r, s اعداد حقیقی باشند و x یک نقطه، $(r+s)x = (rx) + (sx)$.

(۶—۲—۴) اگر r عدد حقیقی باشد و x, y دو نقطه، $r(x+y) = (rx) + (ry)$.

با این تعاریف اکنون آماده هستیم مفاهیم هندسه را در $\mathbb{R}^n$ پیاده کنیم. ساده‌ترین مفهوم هندسی پس از نقطه، "خط راست" است. برای تعریف خط راست در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی راه‌های گوناگون هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوان با صرفاً مفاهیم جمع نقاط و ضرب در یک عدد حقیقی آن را بیان کرد، در این صورت چون این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند همان تعریف را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ اتخاذ کرد. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ در نظر گرفت.

فرض کنید a و A دو نقطه در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشند به طوری که $A \neq 0$. a را به صورت یک نقطه و A را به صورت یک بردار (ساطع از مبدأ) تصور کنید. چون $A \neq 0$ فرض شده است مضارب حقیقی A یک راستا تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از a می‌گذرد و موازی این راستا است. شرط لازم و کافی برای این که یک نقطه روی این خط باشد این است که بتوان آن را به صورت $a + tA$، برای عدد حقیقی مناسب t، نوشت (شکل ۵).



شکل ۵

در تعریف نقاط این خط به شکل $a+tA$، فقط دو عمل ذکر شده، ضرب در عدد حقیقی و جمع، به‌کار رفته است پس می‌توان آن را مبنای تعریف خط راست در $\mathbb{R}^n$ قرارداد.

(۶−۳) تعریف فرض کنید $a, A \in \mathbb{R}^n$، $A \neq \underline{\circ}$، داده شده باشند، در این صورت مجموعهٔ زیر یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ خوانده می‌شود:

$$\langle a; A\rangle = \{a+tA \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{۵}$$

$\langle a; A\rangle$ را به مناسبت مقدمهٔ بالا اصطلاحاً خط راست گذرا از a به موازات A نیز می‌نامیم هرچند که هنوز مفهوم "موازی" تعریف نشده است. بدین ترتیب هر نقطهٔ $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ از مجموعهٔ بالا باید به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} x &= a+tA \\ (x_۱, \ldots, x_n) &= (a_۱, \ldots, a_n) + t(A_۱, \ldots, A_n) \\ &= (a_۱ + tA, \ldots, a_n + tA_n) \end{aligned}$$

پس برای a و A داده شده، خط راست $\langle a; A\rangle$ متشکل از نقاط $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_۱ = a_۱ + tA_۱ \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \tag{۶}$$

که در اینجا t همهٔ مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (٦) را نمایش پارامتری خط راست $\langle a; A\rangle$ نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به مفهوم تعریف شده، همان‌طور که انتظار می‌رود، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطهٔ $\langle a; A\rangle$، به شکل $a + tA$، یعنی متناظر با t است، و این t منحصر به فرد است زیرا که اگر $a + tA = a + t'A$، با جمع کردن "$-a$" با دو طرف نتیجه می‌شود که $tA = t'A$ و $(t - t')A = \underline{\circ}$. حال چون $A \neq \underline{\circ}$ فرض شده است، لزوماً $t - t' = \circ$ یا $t = t'$.

مثال (محورهای مختصات). n تایی‌های $e_۱, \ldots, e_n$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$e_۱ = (۱, \circ, \ldots, \circ) \quad , \quad e_۲ = (\circ, ۱, \circ, \ldots, \circ) \quad , \ldots , \quad e_n = (\circ, \ldots, \circ, ۱)$$

بدین ترتیب e_i آن n تایی است که مؤلفه i ام آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. حال

$$\langle \underline{\circ}; e_i\rangle = \{(\circ, \ldots, \circ, t, \circ, \ldots, \circ) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

یک خط راست است که محور مختصاتی iـ ام یا محور x_i خوانده می‌شود. تعداد محورهای مختصات در $\mathbb{R}^n$ برابر n است.

اگر $l = \langle a; A\rangle$ یک خط راست باشد، خط راست $\langle \underline{\circ}; A\rangle$ را انتقال یافتهٔ l به مبدأ می‌نامیم و با نمادهای l° یا $\langle A\rangle$ نیز نمایش می‌دهیم. داریم

$$l^\circ = \langle A\rangle = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(٦—۴) گزاره. برای هر $B \in l^\circ$ که $B \neq \underline{\circ}$ و هر $b \in l$ داریم:

$$\langle b; B\rangle = \langle a; A\rangle$$

اثبات. اگر $B \in l^\circ \neq \underline{\circ}$، داریم $B = t_\circ A$ برای عدد حقیقی مناسب $t_\circ \neq \circ$، و اگر $b \in l$، $b = a + t_۱ A$ برای عدد حقیقی مناسب $t_۱$، پس برای هر عنصر $b + sB$، $s \in \mathbb{R}$، در $\langle b; B\rangle$ داریم:

$$b + sB = a + t_۱ A + s(t_\circ A) = a + (t_۱ + st_\circ)A$$

پس $\langle b;B\rangle \subset \langle a;A\rangle$. بالعکس اگر نقطه‌ای $a+tA$ در نظر بگیریم، می‌توان $t_1 + st_0 = t$ را برای s حل کرد چون فرض کرده‌ایم $t_0 \neq 0$ و هر نقطهٔ $\langle a;A\rangle$ به $\langle b;B\rangle$ متعلق است. پس $\langle b;B\rangle = \langle a;A\rangle$. $\square$

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که مفهوم "خط راست" به صورتی که تعریف شد تا چه حد به خط راستی که در فضای مأنوس سه بعدی می‌شناسیم نزدیک است؟ از آنجا که خط راست در $\mathbb{R}^n$ در واقع انتقال یافتهٔ همهٔ مضارب یک A ثابت به وسیلهٔ یک بردار ثابت a است، انتظار داریم همان خواص اساسی برقرار باشند. به عنوان نمونه یک انتظار ابتدایی را ثابت می‌کنیم:

(٦—۵) گزاره. اگر دو خط راست دو نقطهٔ متمایز مشترک داشته باشند، بر هم منطبقند.

اثبات. فرض کنید $\langle a;A\rangle$ و $\langle b;B\rangle$ دو خط راست باشند، و $P \neq Q$ دو نقطه که متعلق به هر دو خط است. طبق (٦—۴) $\langle a;A\rangle = \langle P;A\rangle$ و $\langle b;B\rangle = \langle P;B\rangle$ چون P روی هر دو خط قرار دارد، پس:

$$Q = P + tA \quad \text{برای } t \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

$$Q = P + sB \quad \text{برای } s \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

پس $tA = sB$. ضمناً $s \neq 0$ و $t \neq 0$ زیرا که فرض کرده‌ایم $P \neq Q$. بنابراین از $tA = sB$ نتیجه می‌گیریم که B مضربی ناصفر از A است. طبق (٦—۴) خط راست $\langle a;A\rangle = \langle p;A\rangle$ برابر می‌شود با $\langle p;B\rangle$ که همان $\langle b,B\rangle$ است و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

دو خط راست l_1, l_2 را موازی می‌نامیم در صورتی که نقطهٔ مشترک نداشته باشند و انتقال یافته آنها به مبدأ یکی باشد، $l_1^\circ = l_2^\circ$. بنابراین برای هر خط l که از $\underline{o}$ نگذرد، l موازی l° است. توازی دو خط l_1, l_2 را به $l_1 \| l_2$ نمایش می‌دهیم.

نمایش دیگری برای خطوط راست نمایش متقارن است که بدین صورت به‌دست می‌آید. اگر هر یک از روابط (٦) را برای t حل کرده نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{x_1 - a_1}{A_1} = \frac{x_2 - a_2}{A_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{A_n} \qquad (۷)$$

از آنجا که فرض شده است $A \neq \underline{0}$، همهٔ A_i ها نمی‌توانند صفر شوند. صفر شدن بعضی A_i ها در (۷) به منزلهٔ تقسیم بر صفر نیست، بلکه اگر به (٦) نگاه کنیم می‌بینیم که $A_i = 0$ به معنی این است که x_i ثابت و همواره برابر a_i می‌باشد.

مثال. فرض کنید $A_1 \neq 0$ و $A_2 = \cdots = A_n = 0$. در این صورت $A = (A, 0, \ldots, 0)$، یعنی A متعلق به محور x_1 است. نتیجه این که خط راست $\langle a; A \rangle$ یا موازی محور x_1 است یا خود آن است. به همین ترتیب اگر $A_j \neq 0$ و سایر A_i ها صفر باشند، خط $\langle a; A \rangle$ موازی محور x_j یا منطبق بر آن خواهد بود.