دو کاربرد قضیهٔ میانگین

در اینجا به توابع چند متغیری باز می‌گردیم و دو قضیهٔ مهم را به کمک قضیهٔ میانگین یک متغیری به اثبات می‌رسانیم. قضیهٔ اول قبلاً بدون اثبات مورد استفاده قرار گرفت و اثبات آن به بعد موکول شده بود.

(۳۷–۱) قضیه. S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، a یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع که مشتق‌های پاره‌ای آن نسبت به $(n-1)$ متغیر در یک گوی باز حول a وجود دارند و در a پیوسته‌اند و مشتق پاره‌ای آن نسبت به متغیر باقیمانده در a وجود دارد. در این صورت f در a مشتق‌پذیر است.

این قضیه معمولاً با این فرض بیشتر که هر n مشتق پاره‌ای در یک گوی باز حول a وجود دارند و در a پیوسته‌اند بیان می‌شود ولی در اثبات خواهیم دید که در مورد مشتق نسبت به یکی از متغیرها فرض وجود مشتق پاره‌ای در نقطهٔ a کافی است.

قضیه را نخست در حالت دو متغیری ثابت می‌کنیم که ایدهٔ اصلی را نشان می‌دهد، سپس روش تعمیم آن به n متغیر را توضیح می‌دهیم. بدین ترتیب فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^2$، (a,b) یک نقطهٔ درونی S است، $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ وجود دارد، و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک گوی باز حول (a,b) وجود دارد و در نقطهٔ (a,b) پیوسته است. برای مشتق‌پذیری f در (a,b) باید ثابت کنیم:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - [f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad (1)$$

چون (a,b) یک نقطهٔ درونی S است، در بالا و در باقیمانده بحث می‌توان فرض کرد که $|h| > ۰$ و $|k| > ۰$ آنقدر کوچک هستند که مستطیل $a - |h| \leq x \leq a + |h|$، $b - |k| \leq y \leq b + |k|$، در دامنهٔ تعریف S قرار دارد. صورت کسر (۱) را با افزودن و کم کردن عبارت $f(a+h,b)$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)] + [f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]$$

بنابراین کافی است دو حد زیر را تحقیق کنیم

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{[f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]}{\sqrt{h^۲+k^۲}} = ۰ \qquad (۲)$$

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{[f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]}{\sqrt{h^۲+k^۲}} = ۰ \qquad (۳)$$

در مورد (۲) داریم

$$\begin{aligned} |\frac{[f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]}{\sqrt{h^۲+k^۲}}| &\leq |\frac{f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}| \\ &= |\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)| \end{aligned}$$

و اینکه حد عبارت سمت راست صفر است به معنای وجود مشتق $\frac{\partial f}{\partial x}$ در (a,b) است. برای (۳)، از آنجا که $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک گوی حول (a,b) تعریف شده است، با تثبیت h کوچک، $f(a+h,y)$ برای y در نزدیکی b تابعی مشتق‌پذیر نسبت به متغیر دوم است و با استفاده از قضیهٔ میانگین یک متغیری می‌توان نوشت:

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) = k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b')$$

که در آن b' بین b و $b+k$ است. پس صورت کسر (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$k[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]$$

حال چون $|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}| \leq 1$، قدرمطلق کسر (۳) کوچکتر یا مساوی $|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|$ است. چون b' بین b و $b+k$ است، وقتی $(h,k) \to (0,0)$، نقطه $(a+h,b')$ به (a,b) میل می‌کند و چون $\frac{\partial f}{\partial y}$ در (a,b) پیوسته فرض شده است، این عبارت به صفر میل می‌کند و اثبات حکم کامل می‌شود.

برای اثبات حکم در حالت n متغیری، روش بالا را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید نقطهٔ درونی $a = (a_1, \ldots, a_n)$ از مجموعهٔ S داده شده است و نقطهٔ $(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n)$ در دامنهٔ f طوری است که مستطیل $a_1 - |h_1| \leq x_1 \leq a_1 + |h_1|$، ... ، $a_n - |h_n| \leq x_n \leq a_n + |h_n|$ به تمامی در دامنهٔ تعریف f قرار می‌گیرد. حال با تفریق و افزودن $(n-1)$ مقدار $f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-1}+h_{n-1}, a_n)$، $f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-2}+h_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$، ...، $f(a_1+h_1, a_2, \ldots, a_n)$، عبارت $f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ را به صورت مجموع n عبارت زیر می‌نویسیم:

$$[f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-1}+h_{n-1}, a_n) - h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)]$$
$$+ \cdots + [f(a_1+h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-1}+h_{n-1}, a_n) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)]$$

و نشان می‌دهیم نسبت تقسیم قدرمطلق هر کروشه بر $\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$ به صفر میل می‌کند. برای کروشهٔ آخر، این امر از وجود $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ نتیجه می‌شود و برای سایر کروشه‌ها مثل استدلال بالا از قضیهٔ میانگین و پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ در نقطهٔ a استفاده می‌کنیم. استدلال عین بالا است.

مطلب مهم دیگری که در این جلسه مطرح می‌کنیم مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم به بالا است. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، a یک نقطهٔ درونی S، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی که برای آن $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ در همهٔ نقاط یک گوی باز حول a تعریف شده است. بدین ترتیب $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ تابعی از یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ است که دامنهٔ آن شامل نقطهٔ a به عنوان یک نقطهٔ درونی است. بنابراین می‌توان این سؤال را بررسی کرد که آیا مشتق پاره‌ای تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ نسبت به متغیر jـام در نقطهٔ a وجود دارد یا نه. در صورت

وجود، مشتق $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ نسبت به x_j را در نقطهٔ a به صورت یکی از نمادهای زیر نمایش می‌دهیم:

$$(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}))(a) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad , \quad (f_{x_i})_{x_j}(a) \quad , \quad f_{x_i x_j}(a)$$

در حالت خاص $i=j$، به جای $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ می‌نویسیم $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. هر $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ یک مشتق پاره‌ای مرتبه دوم تابع f در نقطهٔ a خوانده می‌شود.

مثال. برای $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $f(x,y,z) = xy^2 - y\sin(x+z)$ تعریف شده است، در مورد وجود مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم بحث کنید و در صورت وجود آنها را محاسبه کنید.

نخست مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول را محاسبه می‌کنیم. مقدار این تابع از ترکیب و آمیختن جبری تابع‌های مشتق‌پذیر به‌دست آمده است، پس دارای مشتق پاره‌ای مرتبهٔ اول نسبت به همهٔ متغیرهاست:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - y\cos(x+z), \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \sin(x+z), \frac{\partial f}{\partial z} = -y\cos(x+z)$$

هر یک از سه عبارت تعریف کنندهٔ مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول نسبت به هر سه متغیر مشتق‌پذیر است، پس مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم وجود دارند و:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = y\sin(x+z), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = 2y - \cos(x+z), \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial x}) = y\sin(x+z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2y - \cos(x+z), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial y}) = -\cos(x+z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial z}) = y\sin(x+z), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial z}) = -\cos(x+z), \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial z}) = y\sin(x+z)$$

در بالا ۹ مشتق پاره‌ای مرتبهٔ دوم محاسبه کردیم ولی توجه کنید که نتایج زیر مشاهده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

یعنی تعویض ترتیب مشتق‌گیری در نتیجهٔ نهایی بی اثر بوده است. این مشاهده تصادفی نیست بلکه قضیهٔ کلی زیر برقرار است:

(۳۷–۲) قضیه. S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است و a یک نقطهٔ درونی آن. فرض کنید $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ در یک گوی باز حول a وجود دارند و در نقطهٔ a پیوسته‌اند. در این صورت $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

اثبات این قضیه را نیز در حالت $n = 2$ می‌نویسیم، تعمیم به حالت nـ بعدی سر راست خواهد بود. بنابراین فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ است و (a, b) یک نقطهٔ درونی آن. اگر $|h|$ و $|k|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشند، مستطیل $a - |h| \leq y \leq a + |h|$، $b - |k| \leq y \leq b + |k|$ به تمامی در دامنهٔ تعریف S قرار می‌گیرد و از آنجا که مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول و دوم باید هر یک در یک گوی باز حول a موجود باشند، فرض می‌کنیم $|h|$ و $|k|$ آنقدر کوچک هستند که این مشتق‌ها در مستطیل فوق وجود دارند، عبارت زیر را به‌ازای هر h و k در نظر می‌گیریم:

$$Q = Q(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

حال دو تابع یک متغیری u و v به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \qquad (۴)$$

$$v(y) = f(a + h, y) - f(a, y) \qquad (۵)$$

بدین ترتیب u اختلاف مقدار f در دو انتهای یک پاره‌خط قائم در امتداد مستطیل و v اختلاف مقدار f در دو سر یک پاره‌خط افقی را نشان می‌دهد. توجه کنید که Q را می‌توان برحسب u و برحسب v نوشت:

$$Q = u(a + h) - u(a) \qquad (۶)$$

$$Q = v(b+k) - v(b) \qquad (۷)$$

برای k داده شده، تابع u نسبت به x مشتق‌پذیر است (وجود $\frac{\partial f}{\partial x}$)، پس طبق قضیهٔ میانگین یک متغیری نقطه‌ای ξ بین a و $a+h$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned} u(a+h) - u(a) &= h \cdot u'(\xi) \\ &= h(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b)) \end{aligned}$$

حال از آنجا که $\frac{\partial f}{\partial x}$ خود نسبت به y مشتق‌پذیر است، مجدداً طبق قضیهٔ میانگین، نقطه‌ای η بین b و $b+k$ وجود دارد که:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b) = k\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)$$

پس با توجه به (٦) داریم:

$$Q = hk\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \qquad (۸)$$

اکنون همین استدلال را با v به جای u انجام می‌دهیم. عیناً مثل بالا نتیجه می‌شود که η' بین b و $b+k$ و ξ' بین a و $a+h$ وجود دارند که:

$$Q = kh\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') \qquad (۹)$$

از (۸) و (۹) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') \qquad (۱۰)$$

یعنی دو نقطهٔ (ξ, η) و (ξ', η') در مستطیل شکل ۱ پیدا شده‌اند که $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}$ در یکی برابر $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}$ در دیگری است. وقتی $(h,k) \longrightarrow (۰,۰)$ داریم $(\xi, \eta) \longrightarrow (a,b)$ و $(\xi', \eta') \longrightarrow (a,b)$، ولی فرض کرده‌ایم که

$\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}$ هر دو در (a,b) پیوسته‌اند، پس دو طرف (۱۰) به $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(a,b)$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(a,b)$ میل می‌کنند و داریم:

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

در حالت n متغیری اثبات عیناً به همین شکل است. در آنجا $(n-۲)$ متغیر را ثابت نگاهداشته و نسبت به دو متغیر مورد نظر استدلال بالا را تکرار می‌کنیم.

به ترتیبی که مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم را مطرح کردیم می‌توان به بررسی وجود مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ سوم و بالاتر پرداخت. با استقرایی بدیهی نسبت به قضیهٔ فوق می‌توان ملاحظه کرد که اگر مشتق پاره‌ای مرتبهٔ kـام نسبت به k متغیر $x_{i_۱}, \ldots, x_{i_k}$ مطرح باشد، ترتیب مشتق‌گیری مطرح نیست مشروط بر این که نتیجه‌های نهایی پیوسته باشند. بدین ترتیب برای یک تابع n متغیری، در صورت پیوستگی مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم، محاسبهٔ $\binom{n+۱}{۲} = \frac{n^۲+n}{۲} = \binom{n}{۲} + n$ مشتق کافی است، و در صورت پیوستگی مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ سوم، محاسبهٔ $\binom{n+۲}{۳} = \binom{n}{۳} + ۲\binom{n}{۲} + n$ مشتق مرتبهٔ سوم، همهٔ مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ سوم را به‌دست می‌دهد.

در اینجا قابل ذکر است که بدون فرض اضافی، و به صرف وجود $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}$ در یک نقطه، نمی‌توان به برابری آنها حکم کرد. مثال زیر شاید ساده‌ترین مثال خلاف باشد.

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

نسبت به مختصات قطبی مقدار f برابر است با:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{۱}{۴} r^۲ \sin ۴\theta$$

شکل زیر علامت f را در هشت ناحیهٔ صفحه نشان می‌دهد. روی خطها مقدار f صفر است. نشان می‌دهیم $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(۰,۰) \neq \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(۰,۰)$. نخست مستقیماً محاسبات لازم را انجام می‌دهیم. از آنجا که f

روی محور x صفر است داریم $\frac{\partial f}{\partial x}(x,۰)=۰$ برای هر x. حال اگر $y\neq ۰$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^۳y-xy^۳}{x^۲+y^۲})\\ &= \frac{(۳x^۲y-y^۳)(x^۲+y^۲)-۲x(x^۳y-xy^۳)}{(x^۲+y^۲)^۲}\\ &= \frac{x^۴y+۴x^۲y^۳-y^۵}{(x^۲+y^۲)^۲}\end{aligned}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۴y+۴x^۲y^۳-y^۵}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰) &= \lim_{k\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(۰,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)}{k}\\ &= \lim_{k\to ۰}\frac{-k}{k}=-۱\end{aligned}$$

به همین ترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,y)=۰$ برای هر y و اگر $x\neq ۰$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^۳y-xy^۳}{x^۲+y^۲})\\ &= \frac{-y^۴x-۴y^۲x^۳+x^۵}{(x^۲+y^۲)^۲}\end{aligned}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{-y^۴x-۴y^۲x^۳+x^۵}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰) &= \lim_{h\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,۰)-\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)}{h}\\ &= \lim_{h\to ۰}\frac{h}{h}=۱\end{aligned}$$

بدین ترتیب $\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}$ در $(۰,۰)$ برابر نیستند. می‌توان چنین پدیده‌ای را با دقت کردن در مورد تغییرات تابع در شکل ۲ انتظار داشت. نقطه $(x,۰)$ را در نظر بگیرید که در طول محور x از مقادیر

منفی به مقادیر مثبت حرکت کند. به‌ازای هر مقدار منفی x، انتظار داریم $\frac{\partial f}{\partial y}(x,۰)$ منفی باشد زیرا در گذر y از مقادیر منفی به مثبت مقدار f از مثبت به منفی کاهش می‌یابد. برعکس برای مقادیر مثبت x، انتظار داریم $\frac{\partial f}{\partial y}(x,۰)$ مثبت باشد. پس تابع $\frac{\partial f}{\partial y}(x,۰)$ وقتی x از منفی به مثبت گذر می‌کند، خود از منفی به مثبت تغییر می‌کند، یعنی انتظار داریم $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(x,۰)$ به‌ازای $x = ۰$ مثبت (یا دست کم غیر منفی) باشد، که عیناً نتیجهٔ محاسبهٔ بالاست ($\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(۰,۰) = ۱$). با همین استدلال شهودی می‌بینیم که $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,y)$ در امتداد محور y، از پایین به بالا نزولی است، پس انتظار داریم $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(۰,۰)$ منفی (یا دست کم غیر مثبت) باشد که محاسبه نیز نشان داد $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(۰,۰) = -۱$. البته استدلال قاطع نیست زیرا که امکان صفر شدن هر دوی $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(۰,۰)$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(۰,۰)$ با این بحث قابل رد کردن نیست، و به هر حال محاسبهٔ بالا لازم است.