توابع مثلثاتی، توابع هذلولوی و تابع نمایی مختلط

یکی از ساده‌ترین و مهمترین معادلات دیفرانسیل در فیزیک و مهندسی معادلهٔ "نوسانگر هارمونیک" است:

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} + \omega^{۲}x = ۰ \qquad (۱)$$

که در آن $\omega > ۰$ یک عدد ثابت است. این معادله ساده‌ترین حرکت نوسانی را نمایش می‌دهد. حرکت یک فنر سادهٔ ایده‌آل (فاقد اصطکاک) که محور آن در راستای محور x باشد از این معادله تبعیت می‌کند و ω ثابتی مربوط به جنس فنر است. (۱) یک نمونهٔ معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است، یعنی رابطه‌ای که در آن مشتق دوم یک تابع نیز ظاهر می‌شود می‌توان هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را با نامگذاری مشتق اول ($\frac{dx}{dt}$، یا "سرعت") به عنوان یک متغیر جدید، $y = \frac{dx}{dt}$، به یک دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول مبدل کرد. این تبدیل زمینه‌ای طبیعی در مکانیک نیوتنی دارد زیرا که سرنوشت یک دستگاه مکانیکی با تعیین "مکان" و "سرعت"، به طور مستقل، در یک لحظه، برای هر زمان تعیین می‌شود. در مورد (۱) با جایگزینی $y = \frac{dx}{dt}$ داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^{۲}x \end{cases} \qquad (۲)$$

این دستگاه را می‌توان روابطی میان دو تابع مجهول x و y از t (زمان) تصور کرد. قضیهٔ وجود و یگانگی معادلات دیفرانسیل در مورد دستگاه‌ها نیز عیناً صادق است. به طور کلی اگر یک دستگاه n معادلهٔ دیفرانسیل درجه اول برای تابع‌های مجهولی $x_1, \ldots, x_n$ از متغیر t به شکل زیر داده شده باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

به طوری که هر یک از تابع‌های f_i نسبت به t پیوسته و نسبت به هر یک از $x_1, \ldots, x_n$ دارای مشتق پاره‌ای پیوسته باشد، آنگاه برای هر $(\overline{t}, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ داده شده ("شرط آغازی"):

(الف) تابعی $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$، I یک بازهٔ شامل $\overline{t}$ به عنوان نقطهٔ درونی، وجود دارد $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$، به طوری که $\varphi(\overline{t}) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ و φ در (۳) صدق می‌کند، یعنی با قرار دادن $x_i = \varphi_i(t)$، $i = 1, \ldots, n$، داریم:

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad i = 1, \ldots, n$$

(ب) جواب با شرط آغازی $(\overline{t}, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x_n})$ به این مفهوم یکتا است که اگر $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ دو جواب با شرط $\psi(\overline{t}) = \varphi(\overline{t})$ باشند، آنگاه φ و ψ در اشتراک بازه‌های تعریف با هم برابرند.

در مورد دستگاه‌های خطی، یعنی وقتی f_i ها نسبت به $(t, x_1, \ldots, x_n)$ از درجهٔ یک باشند، می‌توان نشان داد که برای هر شرط آغازی، یک جواب φ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ وجود دارد، $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ که در شرط آغازی $\varphi(\overline{t}) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ صدق می‌کند. بدین ترتیب در مورد (۲) که یک دستگاه خطی است، چنین حکمی برقرار است. در مورد (۲)، حدس زدن جواب‌ها چندان دشوار نیست. توجه کنید که برای هر یک از $\varphi(t) = \cos \omega t$ و $\varphi(t) = \sin \omega t$، رابطهٔ $\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0$ برقرار است. در واقع اگر A و

B دو عدد حقیقی ثابت باشند، تابع

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

در رابطهٔ $\varphi''(t) + \omega^{۲}\varphi(t) = ۰$ صدق می‌کند. قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ \frac{dx}{dt} = y = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \end{cases} \tag{۴}$$

و $\varphi(t) = (x, y)$ در معادلات (۲) صدق می‌کند. ادعا می‌کنیم، بالعکس، هر جواب (۲)، برای انتخاب مناسب A و B به شکل بالاست. فرض کنید $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y})$ یک شرط آغازی باشد. طبق یکتایی جواب دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل کافی است نشان دهیم جوابی به شکل (۴) با این شرط آغازی وجود دارد، آنگاه نتیجه می‌شود که هر جواب به این شکل است. می‌خواهیم در (۴)، A و B را طوری تعیین کنیم که اگر t را برابر $\overline{t}$ بگیریم، x برابر $\overline{x}$ و y برابر $\overline{y}$ شود، یعنی

$$\begin{cases} \overline{x} = A\cos\omega\overline{t} + B\sin\omega\overline{t} \\ \overline{y} = -A\omega\sin\omega\overline{t} + B\omega\cos\omega\overline{t} \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان یک دستگاه معادلهٔ خطی به شکل زیر برای A و B تلقی کرد:

$$\begin{bmatrix} \cos\omega\overline{t} & \sin\omega\overline{t} \\ -\omega\sin\omega\overline{t} & \omega\cos\omega\overline{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \tag{۵}$$

حال دترمینان ماتریس بالا برابر $\omega \neq ۰$ است، پس جواب یکتایی برای A و B وجود دارد. با توجه به این که:

$$\begin{bmatrix} \cos\omega\overline{t} & \sin\omega\overline{t} \\ -\omega\sin\omega\overline{t} & \omega\cos\omega\overline{t} \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} \cos\omega\overline{t} & -\frac{۱}{\omega}\sin\omega\overline{t} \\ \sin\omega\overline{t} & \frac{۱}{\omega}\cos\omega\overline{t} \end{bmatrix}$$

با ضرب کردن وارون از چپ در دو طرف (۵) حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} A = \overline{x}\cos\omega\overline{t} - \dfrac{۱}{\omega}\overline{y}\sin\omega\overline{t} \\ B = \overline{x}\sin\omega\overline{t} + \dfrac{۱}{\omega}\overline{y}\cos\omega\overline{t} \end{cases} \tag{٦}$$

بدین ترتیب جواب با شرط آغازی مورد نظر شکل زیر را دارد

$$\begin{cases} x = (\overline{x}\cos\omega\overline{t} - \frac{1}{\omega}\overline{y}\sin\omega\overline{t})\cos\omega t + (\overline{x}\sin\omega\overline{t} + \frac{1}{\omega}\overline{y}\cos\omega\overline{t})\sin\omega t \\ y = (-\omega\overline{x}\cos\omega\overline{t} + \overline{y}\sin\omega\overline{t})\sin\omega t + (\omega\overline{x}\sin\omega\overline{t} + \overline{y}\cos\omega\overline{t})\cos\omega t \end{cases}$$

یا:

$$\begin{cases} x = \overline{x}\cos(\omega(t-\overline{t})) + \frac{1}{\omega}\overline{y}\sin(\omega(t-\overline{t})) \\ y = -\omega\overline{x}\sin(\omega(t-\overline{t})) + \overline{y}\cos(\omega(t-\overline{t})) \end{cases} \tag{7}$$

ضمناً توجه کنید که برای هر جواب، $\omega^2 x^2 + y^2 = \omega^2\overline{x}^2 + \overline{y}^2$، یعنی کمیت $\omega^2 x^2 + y^2$ همواره ثابت می‌ماند، که در این در واقع اصل بقاء انرژی است، و مسیر هندسی جواب‌ها در صفحهٔ xy بیضی‌های ($\omega^2 x^2 + y^2 =$ ثابت) هستند (شکل ۱).

فی‌الواقع می‌توان به تعریف جدیدی از تابع‌های سینوس و کسینوس به این طریق دست یافت. با گرفتن $\omega = 1$، توجه کنید که $\cos t$ یگانه جواب معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ است که در شرط آغازی $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}) = (0, 1, 0)$ صدق می‌کند، و $\sin t$ یگانه جواب $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ با شرط آغازی $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}) = (0, 0, 1)$ است.

ملاحضات کاملاً مشابهی در مورد سینوس و کسینوس هذلولوی برقرار است. به جای معادلهٔ نوسانگر هارمونیک، معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0 \tag{8}$$

که $\omega > 0$ یک ثابت داده شده است، و آن را به صورت یک دستگاه بنویسید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \omega^2 x \end{cases} \tag{9}$$

محاسباتی مانند آنچه در مورد (۲) انجام شد نشان می‌دهد که جواب (۹) با شرط آغازی $(\overline{t},\overline{x},\overline{y})$ به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x = \overline{x}\cosh(\omega(t-\overline{t})) + \frac{1}{\omega}\overline{y}\sinh(\omega(t-\overline{t})) \\ y = \omega\overline{x}\sinh(\omega(t-\overline{t})) + \overline{y}\cosh(\omega(t-\overline{t})) \end{cases} \qquad (10)$$

در اینجا کمیت $\omega^2x^2 - y^2 = \omega^2\overline{x}^2 - \overline{y}^2$، یعنی $\omega^2x^2 - y^2$ در طول هر جواب $\varphi(t) = (x,y)$ ثابت می‌ماند و جواب‌ها یک خانواده از هذلولی‌ها با دو خط مجانب $\pm\omega x = y$ هستند (شکل ۲). در واقع با قرار دادن $\omega^2x^2 - y^2 = E$، به‌ازای مقدار ثابت $E = 0$، چهار نیم‌خط واقع بر $\omega^2x^2 - y^2 = 0$ مسیر هندسی جواب معادلات دیفرانسیل را تشکیل می‌دهند. با قرار دادن $\omega = 1$ از (۱۰) دیده می‌شود که تابع $\cosh t$ یگانه جواب (۸) (یا (۹)) با شرط آغازی $(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) = (0,1,0)$ و $\sinh t$ یگانه جواب (۸) (یا (۹)) با شرط آغازی $(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) = (0,0,1)$ می‌باشد.

پیوند دیگری میان توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی از طریق تابع نمایی مختلط حاصل می‌شود. به معادلهٔ اولیهٔ رشد و زوال باز می‌گردیم:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \qquad (11)$$

که در آن λ یک عدد حقیقی داده شده بود و x تابعی از زمان، t. حال وضعیت کلی‌تری را در نظر بگیرید که در آن λ یک عدد مختلط ثابت است و به جای x، یک تابع با مقدار مختلط از متغیر حقیقی t در نظر گرفته شده است:

$$z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t)$$

بدین ترتیب برای $\lambda = \alpha + i\beta$ داده شده، به جستجوی یک جفت تابع حقیقی φ و ψ هستیم که

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t) + i\psi(t)) = (\alpha + i\beta)(\varphi(t) + i\psi(t)) \qquad (12)$$

در اینجا مقصود ما از $\frac{d}{dt}(\varphi(t) + i\psi(t))$ مشتق‌گیری جداگانه نسبت به t از مؤلفه‌های حقیقی و موهومی، یعنی $\varphi'(t) + i\psi'(t)$ است. بنابراین با تفکیک مشتق‌های حقیقی و موهومی می‌توان (۱۲) را

به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \alpha\varphi(t) - \beta\psi(t) \\ \psi'(t) = \beta\varphi(t) + \alpha\psi(t) \end{cases} \tag{۱۳}$$

یا معادلاً دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - \alpha y \end{cases} \tag{۱۴}$$

حالت خاص $\lambda = i$ را در نظر می‌گیریم، یعنی $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \tag{۱۵}$$

یادآوری می‌کنیم برای حالت حقیقی $\frac{dx}{dt} = \lambda x$ جوابی $x = \varphi(t)$ در نظر گرفتیم که $\varphi(۰) = ۱$ و جواب آن را به صورت $e^{\lambda t}$ در آوردیم. برای (۱۵) نیز جواب با شرط آغازی $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}) = (۰, ۱, ۰)$ را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که $x = \cos t$ و $y = \sin t$ در این شرط آغازی و در دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل (۱۵) صدق می‌کنند، پس بنابر یکتایی جواب دستگاه، تنها جواب (۱۵) با شرط آغازی داده شده هستند. بنابراین طبیعی است که تعریف می‌کنیم:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \tag{۱۶}$$

یا به نماد سابق ما $e^{it} = cis(t)$. طبق (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{it}) &= (-\sin t) + i(\cos t) \\ &= i(e^{it}) \end{aligned}$$

یعنی قاعدهٔ $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$ برای عدد موهومی $\lambda = i$ نیز برقرار است. حال برای هر عدد مختلط $s + it$، تعریف می‌کنیم

$$e^{s+it} = e^s e^{it} = (e^s \cos t) + i(e^s \sin t) \tag{۱۷}$$

به سادگی تحقیق می‌شود که روابط $e^{\lambda}e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}$ و $(e^{\lambda})^{\mu} = e^{\lambda\mu}$ برای اعداد مختلط λ و μ نیز برقرار می‌ماند.

اکنون می‌توانیم به کمک این مفهوم رابطهٔ قاطعی بیان توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی بیان کنیم. اگر در رابطهٔ (۱۶) به جای t مقدار $(-t)$ را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t \qquad (۱۸)$$

حال از (۱۶) و (۱۸) نتیجه می‌شود که:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{۲} \quad , \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{۲i} \qquad (۱۹)$$

بالاخره با الهام از روابط (۱۹) و تعریف سینوس و کسینوس هذلولوی، برای هر عدد مختلط z تعریف می‌کنیم:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i} \qquad (۲۰)$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{۲} \quad , \quad \sinh t = \frac{e^{z} - e^{-z}}{۲} \qquad (۲۱)$$

بنابراین روابط زیر میان توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی حاصل می‌شوند:

$$\cos z = \cosh(iz) \quad , \quad \sin z = (\frac{۱}{i}) \sinh(iz) \qquad (۲۲)$$

در همین باب توجه کنید که اگر در معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} + \omega^{۲}x = ۰$، ω بتواند مقدار مختلط بپذیرد، و به جای ω قرار دهیم $i\omega$، آنگاه معادله به $\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} - \omega^{۲}x = ۰$ تبدیل می‌شود که معادله اول توابع مثلثاتی و معادلهٔ دوم توابع هذلولوی را به‌دست می‌دهد.

توجه کنید که از تعریف‌های (۲۰) و (۲۱) نتیجه می‌شود که دو رابطهٔ اساسی زیر در دامنهٔ اعداد مختلط نیز همچنان برقرارند:

$$\cos^{۲} z + \sin^{۲} z = ۱ \qquad (۲۳)$$

$$\cosh^{۲} z - \sinh^{۲} z = ۱ \qquad (۲۴)$$

در مورد (۲۳) توجه کنید که اگر z موهومی محض باشد، $z = it$، طبق ۲۲ داریم $|\cos z| \geq ۱$، در عین حال، رابطهٔ (۲۳) همچنان برقرار است و تناقضی موجود نیست زیرا که برای $z = it$، $\sin z = i \sinh t$ موهومی محض است و مجذور آن منفی است!