# رشد و زوال نمایی (۳)

در دو جلسه قبل تابع‌های $b^x$ و $\log_b x$ را معرفی کردیم. برای هر $b > 0$ داده شده، تابع $b^x$ به صورت $b^x = \exp((\ln b)x)$ تعریف شد. اگر $b \neq 1$، این تابع همهٔ مقادیر حقیقی مثبت را اتخاذ می‌کند و در نتیجه معکوس آن از $\mathbb{R}^+$ به $\mathbb{R}$ وجود دارد که آن را به $\log_b x$ نمایش دادیم. ضمناً نشان دادیم که $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ و نمودار $b^x$ و $\log_b x$ را در شکل ۱ یادآوری می‌کنیم. توجه کنید که برای $b > 1$ هر دو $b^x$ و $\log_b x$ به $+\infty$ میل می‌کنند وقتی $x \longrightarrow +\infty$. می‌خواهیم شیوهٔ رشد این تابع‌ها به $+\infty$ را با شیوهٔ رشد $x^p$ مقایسه کنیم وقتی $p > 0$ یک عدد مثبت داده شده باشد.

(۳۵–۱) گزاره. فرض کنید $b > 1$ و $p > 0$ داده شده باشند. در این صورت

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{b^x} = 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^p} = 0 \qquad (2)$$

بدین ترتیب رشد $\log_b x$ "کندتر" از رشد هر $x^p$ و رشد $b^x$ "سریعتر" از رشد هر $x^p$ است.

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$. عدد صحیحی $n$ در نظر می‌گیریم که $n \geq p$. چندجمله‌ای تیلور درجهٔ $n$ تابع $e^x$ را به انضمام خطا در نظر می‌گیریم:

$$e^x = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

که در آن $\xi$ بین ۰ و $x$ است. چون هدف ما بررسی رفتار $e^x$ برای $x \longrightarrow \infty$ است، فقط به مقادیر مثبت $x$ توجه داریم. بنابراین $0 < \xi < x$، $e^\xi \geq 1$، و داریم

$$\frac{e^x}{x^p} > \frac{x^{(n+1)-p}}{(n+1)!}$$

چون $n \geq p$، داریم $(n+1) - p > 0$ و طرف راست به $+\infty$ میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow +\infty$. بنابراین $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$. حال برای $b > 1$ داده شده، $\ln b > 0$. اگر قرار دهیم $x = (\ln b)t$، چون $\ln b > 0$، $x \to +\infty$ معادل $t \to +\infty$ است. پس

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln b)^p t^p}{e^{(\ln b)t}} \\ &= (\ln b)^p \lim_{t\to\infty} \frac{t^p}{b^t} \end{aligned}$$

و (۱) به اثبات می‌رسد. برای (۲) قرار می‌دهیم $u = \log_b x$، یا معادلاً $b^u = x$، پس

$$\frac{\log_b x}{x^p} = \frac{u}{b^{up}}$$

و با قرار دادن $t = up$ داریم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_b x}{x^p} = \frac{1}{p} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{b^t} = 0$$

■

معمولاً می‌توان فرمول‌های دیگر مربوط به حد تابع‌های نمایی و لگاریتمی را از این دو فرمول یا در واقع $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$ نتیجه گرفت.

**مثال.** $\lim_{x\to 0+} (x^p \log_b x)$ را محاسبه کنید که در اینجا $b > 1$ و $p > 0$ اعداد ثابت داده شده‌اند. اگر $\frac{1}{x}$ را برابر $t$ قرار دهیم، داریم:

$$\lim_{x\to 0+} (x^p \log_b x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\log_b t}{t^p}$$

که این حد مطابق (۲) صفر است.

قبل از ادامه بحث و ارائه نمونه دیگری از یک وضعیت طبیعی که در آن تابع نمایی ظاهر می‌شود، یک مثال عددی در مورد مثالی که دو جلسهٔ پیش در مورد زوال نهایی ذکر شد ارائه می‌کنیم.

**مثال.** مادهٔ رادیواکتیوی دارای نیم عمر ۱۰۰۰ سال است. یک توده از این ماده پس از چند سال به $\frac{۱}{۳}$ جرم اولیه می‌رسد؟

طبق بحث‌های گذشته می‌توان برای $\lambda < ۰$ مناسب نوشت $x = x_۰ e^{\lambda t}$ که در آن $x_۰$ جرم اولیهٔ تودهٔ مادهٔ رادیواکتیو است. این که نیم عمر این ماده ۱۰۰۰ سال است نتیجه می‌دهد که:

$$\frac{x_۰}{۲} = x_۰ e^{۱۰۰۰\lambda}$$

$$\lambda = -\frac{\ln ۲}{۱۰۰۰}$$

برای این که جرم به $\frac{۱}{۳}x_۰$ برسد، $t$ باید در رابطهٔ زیر صدق کند.

$$\frac{x_۰}{۳} = x_۰ e^{-\frac{\ln ۲}{۱۰۰۰}t}$$

$$t = ۱۰۰۰\frac{\ln ۳}{\ln ۲}$$

$$t \simeq ۱۵۸۵ \text{ سال}$$

عدد $e$ و تابع نمایی ظاهراً اولین بار در رابطه با مسایل سود بانکی ظاهر شده‌اند. فرض کنید به سرمایه‌ای در سال $r$ درصد سود بانکی تعلق می‌گیرد. می‌نویسیم $s = \frac{r}{۱۰۰}$. پس، بعد از یک سال سرمایه به $A + sA = A(۱ + s)$ می‌رسد. اگر به‌جای $r$ درصد سود در سال، $\frac{r}{۲}$ درصد سود هر نیم سال تعلق گیرد، مقدار سرمایه پس از یک سال برابر خواهد شد با:

$$A(۱ + \frac{s}{۲})(۱ + \frac{s}{۲}) = A(۱ + \frac{s}{۲})^۲ > A(۱ + s)$$

به همین ترتیب برای سود $\frac{r}{۴}$ درصد که به طور فصلی افزوده شود به مجموع $A(۱ + \frac{s}{۴})^۴$ در سال خواهیم رسید و به طور کلی اگر $\frac{r}{n}$ درصد پس از هر $\frac{۱}{n}$ سال سود داده شود پس از یک سال به

$A(1+\frac{s}{n})^n$ به عنوان حاصل سرمایه می‌رسیم. می‌توان به سادگی تحقیق کرد که با افزایش $n$، $A(1+\frac{s}{n})^n$ افزایش می‌یابد. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر سود عملاً به طور پیوسته افزوده شود، یعنی $n \longrightarrow +\infty$، پس از یک سال به چه سرمایه‌ای دست خواهیم یافت؟ پس در واقع بررسی حد $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{s}{n})^n$ مطرح است. برای $x > 0$، تابع

$$f(x) = (1+\frac{s}{x})^x$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا $s$ یک عدد حقیقی ثابت است. چون $f(x) > 0$، $\ln f(x)$ وجود دارد. به علاوه چون $f$ و $\ln$ مشتق‌پذیرند، تابع $\ln(1+\frac{s}{x})^x$ مشتق‌پذیر است. داریم:

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= x\ln(1+\frac{s}{x}) \\ &= s\frac{\ln(1+\frac{s}{x})-\ln(1)}{\frac{s}{x}}\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $h = \frac{s}{x}$. داریم $\lim_{x\to\infty} h = 0$، پس

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x)) &= s\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} \\ &= s\ln'(1) \\ &= s\end{aligned}$$

حال تابع $\exp$ پیوسته است، پس $\lim_{x\to+\infty}\exp(\ln f(x)) = \exp(\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)) = e^s$ ، یا

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{s}{x})^x = e^s \qquad (۳)$$

بدین ترتیب حتی اگر سود بانکی به طور پیوسته (با نرخ $r$ درصد در سال) افزوده شود سرمایه در پایان سال $e^r$ برابر خواهد شد.

به کمک تابع نمایی دسته‌ای از توابع موسوم به "توابع هذلولوی" را می‌توان معرفی کرد که در بسیاری مسایل ریاضی و کاربردی ظاهر می‌شوند. دو تابع اصلی مورد نظر به صورت زیر تعریف

می‌شوند:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} \qquad \text{سینوس هذلولوی} \qquad (۴)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \qquad \text{کسینوس هذلولوی} \qquad (۵)$$

به تقلید از توابع مثلثاتی، تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت هذلولوی نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tanh = \frac{\sinh}{\cosh} \quad , \quad \coth = \frac{\cosh}{\sinh} \qquad (۶)$$

$$sech = \frac{۱}{\cosh} \quad , \quad csch = \frac{۱}{\sinh} \qquad (۷)$$

تابع $\cosh$ همه جا اکیداً مثبت است، پس $\tanh$ و $sech$ در سراسر $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند و تابع $\sinh$ در $x = ۰$ برابر صفر است، پس دامنهٔ $\coth$ و $csch$ مجموعهٔ $\mathbb{R} - \{۰\}$ می‌باشد.

اتحاد اساسی زیر در مورد تابع‌های هذلولوی برقرار است:

$$\cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱ \qquad (۸)$$

این رابطه با محاسبهٔ سرراست از تعریف‌های (۴) و (۵) نتیجه می‌شود. با توجه به مشتق‌پذیری تابع نمایی و فرمول مشتق آن، فرمول‌های زیر برای مشتق تابع‌های هذلولوی به‌دست می‌آیند:

$$\sinh' x = \cosh x \qquad (۹)$$

$$\cosh' x = \sinh x \qquad (۱۰)$$

$$\tanh' x = sech^{۲} x \qquad (۱۱)$$

فرمول‌های (۸) تا (۱۱) وجوه شباهت و افتراق تابع‌های هذلولوی با تابع‌های مثلثاتی را نشان می‌دهند. تابع‌های سینوس و تانژانت هذلولوی مانند تابع‌های سینوس و تانژانت مثلثاتی تابع‌های فرد هستند و تابع کسینوس هذلولوی مانند کسینوس مثلثاتی یک تابع زوج است. نمودار این سه تابع هذلولوی در شکل ۲ نمایش داده شده است.

یک وجه اشتراک قابل توجه در رابطهٔ توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی به ترتیب با دایره و هذلولی ظاهر می‌شود. توابع کسینوس و سینوس را می‌توان وسیلهٔ پارامتری کردن دایرهٔ واحد در صفحه به شمار آورد. هر نقطهٔ دایرهٔ واحد $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ را می‌توان به صورت $(\cos t, \sin t)$ نمایش داد که در آن $t$ زاویهٔ اندازه‌گیری شده از نیمهٔ مثبت محور $x$ تا شعاع واصل از مبدأ به نقطهٔ روی دایره است. تعبیر هندسی دیگری نیز می‌توان برای $t$ ارائه کرد. اگر $t$ برحسب رادیان محسوب کنیم، مقدار عددی مساحت قطاع بین نیمهٔ مثبت محور و شعاع واصل از مبدأ به نقطهٔ $(\cos t, \sin t)$ برابر $\frac{۱}{۲}t$ است. حال نیمهٔ راست $(x > ۰)$ "هذلولی واحد"، یعنی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$، را در نظر می‌گیریم. بنابر اتحاد (۸)، هر نقطهٔ به شکل $(\cosh t, \sinh t)$ روی این منحنی قرار دارد. بالعکس هر نقطهٔ این منحنی نمایشی منحصر به فرد به $(\cosh t, \sinh t)$ دارد زیرا $\sinh t$ یک تابع یک به یک و پوشا از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است و $\cosh t$ یک تابع زوج با مینیمم برابر ۱ در $t = ۰$ است و برای $t \geq ۰$ یک به یک می‌باشد. حال چه تعبیر هندسی می‌توان به $t$ نسبت داد؟ به شکل ۳ (ب) توجه کنید و ناحیهٔ بیان این شاخه هذلولی، پاره‌خط بین $(۰, ۰)$ و $(۱, ۰)$ روی محور $x$ و خط واصل از $(۰, ۰)$ به $(\cosh t, \sinh t)$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد که مساحت این قطاع نیز برابر $\frac{۱}{۲}t$ است.

در جلسهٔ آینده ارتباط عمیق‌تری میان تابع‌های مثلثاتی و هذلولوی با گذر از اعداد مختلط ملاحظه خواهیم کرد. اولین کاربرد مهم توابع هذلولوی در رابطه با شکل یک زنجیر یا طناب آویزان به‌دست

آمده است. اگر یک زنجیر، کابل یا طناب را بین دو نقطه آویزان کنیم به طوری که قطعهٔ بین دو نقطهٔ آویز بتواند تحت اثر جاذبهٔ زمین آزادانه شکل بگیرد، شکلی که به‌دست می‌آید به طور کیفی شبیه بخشی از یک سهمی است، ولی در واقع نشان داده می‌شود که شکل حاصل را باید برحسب cosh بیان کرد.