رشد و زوال نمایی (۲)

در جلسهٔ گذشته جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \tag{۱}$$

را بررسی کردیم که در اینجا λ یک عدد داده شده است. برای $\lambda = ۱$، جواب $\varphi(t)$ این معادله را که $\varphi(\circ) = ۱$ به $\exp$ نمایش دادیم و نشان دادیم که $\exp(t) = e^t$ برای هر عدد گویای t که در اینجا e عددی ثابت با مقدار تقریبی $e \simeq ۲/۷۱۸$ است. در واقع برای اعداد ناگویای t، $\exp t$ به عنوان تعریف e^t استفاده کردیم. بدین ترتیب e^t یک تابع مشتق‌پذیر نسبت به t است و دارای این ویژگی جالب توجه است که مشتق آن برابر خود آن است (رابطهٔ (۱) بالا به‌ازای $\lambda = ۱$) در واقع همچنان که در (۳۳—۲—۱) جلسهٔ قبل دیدیم هر تابع φ با ویژگی $\varphi'(t) = \varphi(t)$، به‌ازای هر t، باید مضرب ثابتی از e^t باشد.

از طرفی دیگر ملاحظه کردیم که برای هر λ، عددی مثبت b وجود دارد که جواب φ از (۱) با شرط آغازی $\varphi(\circ) = ۱$ باید برای مقادیر گویای t به شکل $\varphi(t) = b^t$ باشد. می‌خواستیم رابطه b و λ را بررسی کنیم. به این منظور تابع $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(t) = \exp(\lambda t)$$

داریم $\psi(\circ) = ۱$، یعنی ψ شرط آغازی $\psi(\circ) = ۱$ را داراست، و از سویی دیگر طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\psi'(t) = \lambda \exp(\lambda t) = \lambda \psi(t)$$

یعنی ψ در (۱) صدق می‌کند. طبق یکتایی جواب معادلهٔ دیفرانسیل با شرط آغازی داده شده، $\exp(\lambda t)$ همان تابع $\varphi(t)$ است و

$$b^t = \exp(\lambda t)$$

با قرار دادن $t = 1$ نتیجه می‌شود:

$$b = \exp(\lambda) = e^{\lambda} \tag{۲}$$

و رابطهٔ موعود میان b و λ به‌دست آمده است ضمناً نتیجه می‌شود که $(e^{\lambda})^t = e^{\lambda t}$. چون همهٔ جواب‌های (۱) مضرب ثابت یک جواب غیر صفر هستند، هر جواب (۱) به شکل زیر است:

$$c\exp(\lambda t) = ce^{\lambda t} \tag{۳}$$

اگر مقدار اولیه کمیت x که در (۱) صدق می‌کند (یعنی مقدار در $t = 0$) را به x_0 نمایش دهیم، از (۳) نتیجه می‌شود که $x_0 = c$، یا جواب کلی (۱) به شکل زیر است:

$$x_0 e^{\lambda t} = x_0 (e^{\lambda})^t \tag{۴}$$

سؤال دیگری که در جلسهٔ قبل مطرح شد این بود که آیا به‌ازای هر $b > 0$، λ مناسب وجود دارد که b^t جواب $\frac{dx}{dt} = \lambda x$ باشد. با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده $b = e^{\lambda}$، سؤال به این مبدل می‌شود که آیا تابع $\exp$ همهٔ مقادیر مثبت را اتخاذ می‌کند؟

(۱–۳۴) گزاره. تابع $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع صعودی است که

$$\exp t \longrightarrow +\infty \text{ وقتی } t \longrightarrow +\infty \quad , \quad \exp t \longrightarrow 0 \text{ وقتی } t \longrightarrow -\infty$$

اثبات. دیده‌ایم که $\exp t$ همواره مثبت است، پس $\exp$ صعودی است. حال $e > 1$، پس $\exp(n) = e^n$ به $+\infty$ میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow +\infty$، و نیز $\exp(-n) = \frac{1}{e^n}$ به 0 میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow \infty$. برای

هر $K > ۰$ داده شده، عدد صحیح N را طوری می‌گیریم که $e^N > K$. چون $\exp$ صعودی است، برای $x \geq N$ داریم $\exp(x) \geq \exp(N) > K$، پس $\exp(x) \longrightarrow +\infty$ وقتی $x \to +\infty$. به همین ترتیب $\exp(x) \longrightarrow ۰$ وقتی $x \longrightarrow -\infty$. ■

از گزارهٔ بالا نتیجه می‌شود که $\exp$ همهٔ مقادیر مثبت را اتخاذ می‌کند زیرا برای هر $p > ۰$ داده شده، N وجود دارد که $e^{-N} < p < e^N$. چون $\exp$ پیوسته است و دو مقدار e^N و e^{-N} را اتخاذ می‌کند، هر مقدار بینی، مثلاً p، را نیز طبق قضیهٔ مقدار بینی اتخاذ می‌کند. بدین ترتیب برای هر $b > ۰$ عددی (منحصر به فرد) λ وجود دارد که $e^\lambda = b$. λ منحصر به فرد است زیرا $\exp$ صعودی است. طبیعی است که $e^\lambda = b$ را معادلاً به صورت زیر نمایش دهیم:

$$\lambda = \log_e b \qquad (۵)$$

لگاریتم به پایهٔ e را معمولاً لگاریتم طبیعی می‌نامند و به $\ln$ نمایش می‌دهند. در واقع $\ln$ معکوس ترکیبی تابع $\exp$ است که با دامنهٔ اعداد حقیقی مثبت تعریف شده است و همهٔ مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند (شکل ۱).

داریم:

$$\ln(\exp t) = t \quad \text{برای هر عدد حقیقی } t \qquad (٦)$$

$$\exp(\ln t) = t \quad \text{برای هر عدد مثبت } t \qquad (۷)$$

از (٦) و خواص $\exp$ که در جلسهٔ قبل دیدیم، خواص زیر در مورد $\ln$ حاصل می‌شوند:

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad \text{برای } B > ۰, A > ۰ \qquad (۸)$$

$$\ln(\frac{A}{B}) = \ln(A) - \ln(B) \quad \text{برای } B > ۰, A > ۰ \qquad (۹)$$

$$\ln(t^\alpha) = \alpha \ln t \qquad t > ۰ \text{ برای} \tag{۱۰}$$

خواص مشتق‌پذیری $\ln$ را نیز می‌توان به عنوان معکوس ترکیبی $\exp$ بررسی کرد. به طور کلی اگر $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که روی بازه‌ای باز I تعریف شده و مشتق آن همه جا مثبت (یا به ترتیب همه جا منفی) است، f تابعی صعودی (به ترتیب نزولی) خواهد شد و اگر J مجموعهٔ مقادیر f باشد، تابع معکوس، $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ طوری است که:

$$t \in I : \quad g(f(t)) = t$$

$$t \in J : \quad f(g(t)) = t$$

فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است. نشان می‌دهیم g نیز مشتق‌پذیر است و رابطهٔ بین مشتق آنها در نقاط متناظر را به‌دست می‌آوریم. چون بازهٔ I باز فرض شده است هر نقطهٔ a از آن درونی است. قرار دهید $b = f(a)$. b یک نقطهٔ درونی J است زیرا که f صعودی یا نزولی است پس مقادیر بزرگتر و کوچکتر از b را اتخاذ می‌کند. بنابراین اگر k به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $b+k$ برابر $f(a+h)$ برای h مناسب است. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\frac{g(b+k) - g(b)}{k} &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \\
&= \frac{h}{f(a+h) - f(a)}
\end{aligned}$$

از آنجا که معکوس یک تابع پیوسته یک متغیری خود پیوسته است (چرا؟)، وقتی $k \longrightarrow ۰$، داریم $h \longrightarrow ۰$، بنابراین $\lim_{k \to ۰} \frac{g(b+k)-g(b)}{k}$ وجود دارد و برابر $\frac{۱}{f'(a)}$ است:

$$g'(f(a)) = \frac{۱}{f'(a)} \tag{۱۱}$$

برای $f = \exp$ و $g = \ln$ داریم

$$\begin{aligned}
\ln'(\exp t) &= \frac{۱}{\exp'(t)} \\
&= \frac{۱}{\exp(t)}
\end{aligned}$$

حال هر $x > 0$ را می‌توان به صورت $\exp t$ برای t مناسب (منحصر به فرد) نوشت، پس

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \tag{12}$$

بدین ترتیب $\ln x$ جدول تابع‌های اولیهٔ تابع‌های به شکل x^α را تکمیل می‌کند.

در اینجا لازم است فهرست خواص تابع‌های نمایی و معکوس آنها (تابع‌های لگاریتمی) را تکمیل و جمعبندی کنیم. برای $b > 0$ تابع b^t به صورت زیر تعریف شد:

$$b^t = \exp((\ln b)t) \tag{13}$$

در جلسهٔ گذشته ثابت کردیم

$$b^{s+t} = b^s b^t \qquad s, t \in \mathbb{R} \tag{14}$$

توجه کنید که ویژگی مأنوس زیر نیز برقرار است:

$$(b^s)^t = b^{st} \qquad s, t \in \mathbb{R} \tag{15}$$

زیرا که

$$\begin{aligned} (b^s)^t &= \exp(\ln(b^s)t) \\ &= \exp(s(\ln b)t) \\ &= \exp((\ln b)(st)) \\ &= b^{st} \end{aligned}$$

برای $b \neq 1$، b^t صعودی یا نزولی است بسته به این که $b > 1$ یا $0 < b < 1$. معکوس ترکیبی b^t را $\log_b t$ می‌نامیم:

$$\log_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\mathbb{R}^+ : \text{مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت})$$

$$\log_b(b^t) = t \qquad t \in \mathbb{R} \tag{16}$$

$$b^{\log_b t} = t \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{۱۷}$$

خواص زیراز (۱۴) و (۱۵) نتیجه می‌شوند:

$$\log_b(st) = \log_b s + \log_b t \qquad s, t \in \mathbb{R}^+ \tag{۱۸}$$

$$\log_b s^\alpha = \alpha \log_b s \qquad \alpha \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^+ \tag{۱۹}$$

ضمناً رابطه زیر نیز برای هر s و t مثبت برقرار است:

$$\log_t s = \frac{\ln s}{\ln t} \tag{۲۰}$$

(به جای $\ln$ می‌توان از لگاریتم به هر پایهٔ ثابت دیگر در طرف راست استفاده کرد) زیرا که با استفاده از (۱۹) و (۱۷):

$$\begin{aligned} (\log_t s) \ln t &= \ln t^{\log_t s} \\ &= \ln s \end{aligned}$$

از تعریف (۱۳) و قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌شود که b^t مشتق‌پذیر است و

$$\frac{d}{dt}(b^t) = (\ln b) b^t \tag{۲۱}$$

برای $b \neq ۱$ این عبارت همواره مثبت یا همواره منفی است، پس تابع معکوس، یعنی $\log_b$ نیز مشتق‌پذیر است و طبق (۲۰) یا از (۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{۱}{\ln b} \cdot \frac{۱}{x} \tag{۲۲}$$