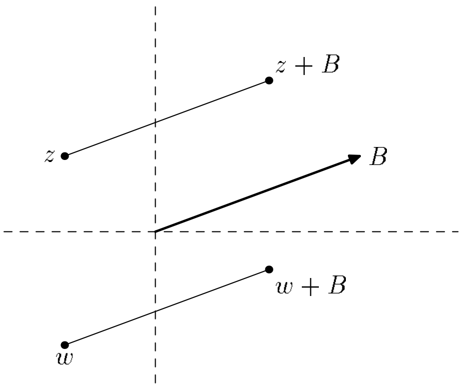
اعداد مختلط و تبدیلات صفحه

کاربردهای متنوعی برای اعداد مختلط وجود دارد. در اینجا به ارائه یک نمونه از این کاربردها می‌پردازیم. صفحهٔ $\mathbb{R}^{۲}$ یا معادلاً $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. به کمک اعداد مختلط به بررسی تبدیل‌های "انتقال"، "دوران" و "تجانس" از صفحه خواهیم پرداخت. انتقال را به این مفهوم می‌گیریم که همهٔ نقاط صفحه در یک امتداد و به یک مقدار حرکت کنند. به طور دقیق‌تر، برای بردار ثابتی B، هر نقطه به اندازهٔ B حرکت می‌کند. از آنجا که جمع اعداد مختلط متناظر با جمع بردارها تعریف شد، می‌توان انتقال را تابعی $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ به شکل

$$T(z) = z + B \qquad (۱)$$

تلقی کرد که در آن B یک عدد مختلط ثابت است. بدین ترتیب اگر $B_{۱}$ و $B_{۲}$ دو عدد مختلط ثابت

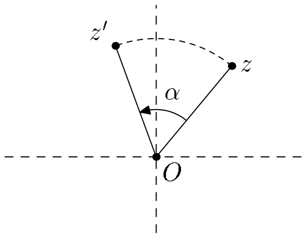


باشند حاصل دو انتقال متوالی با $B_{۱}$ و $B_{۲}$ عبارت است از:

$$z \longrightarrow z + B_{۱} \longrightarrow (z_{۱} + B_{۱}) + B_{۲} = z + (B_{۱} + B_{۲})$$

یعنی انتقال به وسیله $B_1 + B_2$.

حال دوران را در نظر می‌گیریم و نخست دوران حول مبدأ مختصات، یعنی $\underline{0}$، را بررسی می‌کنیم. برای هر زاویهٔ α، مقصود از دوران حول $\underline{0}$ به زاویهٔ α تبدیلی است که هر نقطه z را به نقطه‌ای z' می‌فرستد که فاصلهٔ آن از مبدأ برابر فاصله z از مبدأ است ولی زاویه از خط واصل از $\underline{0}$ به z به خط واصل از $\underline{0}$ به z' برابر مقدار ثابت α است. توجه داشته باشید که همواره طبق قرارداد، مقادیر مثبت α در جهت مثلثاتی (ضد عقربه ساعت) منظور می‌شود. با توجه به تعریف حاصل‌ضرب اعداد مختلط، اگر



$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک دوران حول مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$R(z) = cis(\alpha) \cdot z \qquad (۲)$$

که α مقداری ثابت است. حال اگر بخواهیم دوران زاویه α حول نقطهٔ دلخواهی z_0 را با اعداد مختلط نمایش دهیم به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست انتقالی به اندازهٔ $(-z_0)$ انجام می‌دهیم که z_0 را به $\underline{0}$ منتقل کند، سپس دوران زاویهٔ α حول $\underline{0}$ را انجام می‌دهیم (ضرب کردن در $cis(\alpha)$)، و بالاخره با انتقال به وسیلهٔ z_0، نقطه اولیهٔ z_0 را به مکان اولیه‌اش باز می‌گردانیم. بدین ترتیب دوران زاویه α حول z_0 به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$z \longrightarrow z - z_0 \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_0) \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_0) + z_0 \qquad (۳)$$

پس فرمول دوران زاویهٔ α حول z_0 به صورت زیر نیز داده می‌شود:

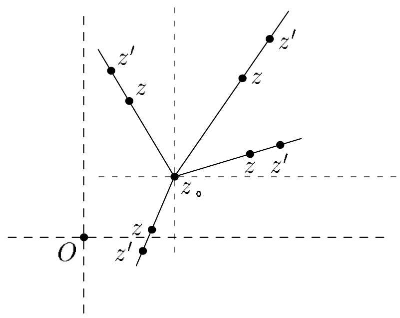
$$z \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_0) + z_0 = cis(\alpha) \cdot z + (1 - cis(\alpha)) \cdot z_0 \qquad (۴)$$

توجه کنید که چون $(1 - cis(\alpha)) \cdot z_0$ یک عدد مختلط ثابت است، بلافاصله نتیجه می‌شود که

(۵—۱) هر دوران در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب دوران حول $\underline{0}$ با همان زاویه و یک انتقال نوشت.

بالعکس اگر متوالیاً یک دوران زاویهٔ α، $\alpha \neq 2k\pi$، حول $\underline{0}$ و سپس یک انتقال صورت گیرد، ادعا می‌کنیم حاصل یک دوران زاویهٔ α حول نقطه‌ای z_0 خواهد بود. چنین ترکیبی به صورت $cis(\alpha)\cdot z + B$ خواهد بود. چون فرض کرده‌ایم $\alpha \neq 2k\pi$، داریم $\cos(\alpha) \neq 1$ پس اگر z_0 را به صورت $\frac{B}{1-cis(\alpha)}$ تعریف کنیم، داریم $cis(\alpha)\cdot z + B = cis(\alpha)\cdot z + (1 - cis(\alpha))\cdot z_0$ که طبق (۴) دوران زاویهٔ α حول z_0 است.

حال تبدیل تجانس را در نظر می‌گیریم. اگر عدد حقیقی نامنفی k داده شده باشد و z_0 یک نقطه در صفحه باشد، مقصود از تجانس به مرکز z_0 با ضریب k این است که هر نقطه z روی نیم‌خط واصل از z_0 به z به نقطه‌ای z' حرکت می‌کند که فاصله‌اش از z_0، k برابر فاصله z از z_0 است.



چون فاصله z_0 از z_0 صفر است و $k\cdot 0 = 0$، مرکز تجانس تحت اثر تجانس ثابت باقی می‌ماند. برای به‌دست آوردن فرمولی برای تجانس، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که مرکز تجانس مبدأ مختصات، $\underline{0}$، است. در این حالت روشن است که نقطه z به نقطهٔ kz فرستاده می‌شود (ضرب عدد k در "بردار" z). بدین ترتیب تابع تجانس به مرکز $\underline{0}$ با ضریب k، $H:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$، عبارت است از:

$$H(z) = kz \qquad (5)$$

برای تجانس نسبت به مرکز دلخواه z_0، به روشی مشابه دوران حول z_0 عمل می‌کنیم، یعنی نخست با انتقال $(-z_0)$ در صفحه، نقطهٔ z_0 را به $\underline{0}$ منتقل می‌کنیم، سپس تجانس فوق، H، را انجام می‌دهیم و

بالاخره حاصل را به اندازهٔ $z_\circ$ انتقال می‌دهیم:

$$z \longrightarrow z - z_\circ \longrightarrow k(z - z_\circ) \longrightarrow k(z - z_\circ) + z_\circ \qquad (6)$$

یعنی تابع تجانس به مرکز $z_\circ$ و ضریب k را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z \longrightarrow k(z - z_\circ) + z_\circ = kz + (1 - k)z_\circ \qquad (7)$$

از آنجا که $(1 - k)z_\circ$ عددی ثابت است داریم

(۵—۲) هر تجانس در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب تجانس حول $\underline{\circ}$ با همان ضریب و یک انتقال نوشت.

در اینجا نیز عکس مطلب درست است. فرض کنید نخست تجانس با ضریب $k \neq 1$ انجام گیرد و سپس یک انتقال با بردار B. در این صورت حاصل اثر بر نقطهٔ z عبارت است از $kz + B$. چون $k \neq 1$، $\frac{B}{1-k}$ تعریف شده است و اگر آن را $z_\circ$ بنامیم داریم $kz + B = kz + (1 - k)z_\circ$ که طبق (۷) تجانس با ضریب k به مرکز $z_\circ$ است. حال اگر به فرمول‌های کلی انتقال، دوران و تجانس، که توسط (۱)، (۴) و (۷) ارائه شده‌اند، نظر کنیم، ملاحظه می‌کنیم که هر سه، تابع‌های درجه یک نسبت به z تعریف می‌کنند. اکنون نشان می‌دهیم که عکس این مطلب نیز صحیح است، یعنی هر تابع درجه یک $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ در واقع ترکیبی از این سه نوع تبدیل است. فرض کنید تابع $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ به صورت

$$f(z) = Az + B \qquad (8)$$

داده شده است که در آن A, B اعداد مختلط ثابت باشند. اگر $A = \circ$ که همهٔ نقاط صفحه به نقطهٔ ثابت B فرستاده می‌شوند و این، تجانس به مرکز B با ضریب $k = \circ$ است.

فرض کنید $A \neq \circ$، می‌توان نوشت:

$$A = |A| cis(\alpha) \qquad (9)$$

پس f را می‌توان به صورت ترکیب زیر نوشت:

$$z \xrightarrow{\text{دوران حول } \underline{\circ}} cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{تجانس به مرکز } \underline{\circ}} |A| cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{انتقال}} |A| cis(\alpha) \cdot z + B \qquad (10)$$

یعنی هر تابع درجه یک، ترکیب یک دوران حول $\underline{0}$، یک تجانس به مرکز $\underline{0}$، و یک انتقال است. همچنین چون عمل ضرب جابجایی است، می‌توان ترتیب دوران و تجانس را تعویض کرد.

در واقع اکنون می‌بینیم که ترکیب (۱۰) یا یک انتقال است و یا ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز مشترک:

حالت اول: $A = 1$ در این صورت تابع به $z \longrightarrow z + B$ خلاصه می‌شود که یک انتقال است.

حالت دوم: $A \neq 1$ در این صورت نشان می‌دهیم که نقطه‌ای z_0 وجود دارد به طوری که $z \longrightarrow Az + B$ ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز z_0 است. یک چنین نقطهٔ z_0 باید در رابطهٔ $Az_0 + B = z_0$ صدق کند چون مرکز دوران و تجانس ثابت می‌ماند، پس معادلاً $(1 - A)z_0 = B$ و چون $A \neq 1$ فرض شده است، $z_0 = \frac{B}{1-A}$ به‌دست می‌آید. حال نشان می‌دهیم که این نقطه فی‌الواقع ویژگی مورد نظر را دارد، یعنی $z \longrightarrow Az + B$ ترکیب دوران و تجانس حول z_0 است. داریم:

$$Az + B = A(z - \frac{B}{1-A}) + B + \frac{AB}{1-A} = A(z - z_0) + z_0$$

با نوشتن $A = |A|cis(\alpha)$ ملاحظه می‌کنیم که این تابع ترکیب دوران با زاویه α و تجانس با ضریب $|A|$ حول z_0 است.

بالاخص دو حالت زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم:

اگر $A \neq 1$ و $|A| = 1$، تابع $z \longrightarrow Az + B$ دوران به زاویه $cis(arg(A))$ حول $z_0 = \frac{B}{1-A}$ است.

اگر $A \neq 1$ و $A \geq 0$، تابع $z \longrightarrow Az + B$ تجانس با ضریب A حول $z_0 = \frac{B}{1-A}$ است.

مثال ۱. فرض کنید $T_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویه α حول z_1 و $T_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویهٔ β حول z_2 است. در این صورت ترکیب $T_2 \circ T_1$ چگونه تبدیلی است؟

داریم $T_1(z) = cis(\alpha) \cdot z + B_1$ و $T_2(z) = cis(\beta) \cdot z + B_2$. پس

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(z) &= T_2(cis(\alpha) \cdot z + B_1) + B_2 \\ &= cis(\beta) \cdot cis(\alpha) \cdot z + cis(\beta) \cdot B_1 + B_2 \\ &= cis(\alpha + \beta) \cdot z + (cis(\beta) \cdot B_1 + B_2) \end{aligned}$$

که در اینجا $cis(\beta) \cdot B_1 + B_2$ یک عدد مختلط ثابت است. اگر $\alpha + \beta = 2k\pi$، یا $\cos(\alpha + \beta) = 1$

این تبدیل یک انتقال با مقدار $cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲$ است. اگر $\alpha + \beta \neq ۲k\pi$، تبدیل فوق یک دوران به زاویه $\alpha + \beta$ حول $z_۰ = \frac{cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲}{۱ - cis(\alpha+\beta)}$ می‌باشد.