رشد و زوال نمایی (۱)

در بسیاری مباحث علوم طبیعی به کمیت‌های متغیری بر می‌خوریم که میزان رشد یا زوال نسبی آن مستقل از مقدار موجود است. به عنوان نمونه در مورد یک مادهٔ رادیواکتیو داده شده، در طول یک بازهٔ زمانی به طول مشخص، مثلاً ۱۰۰ سال، درصد مشخصی از ماده تبدیل به تشعشع می‌شود، مستقل از اینکه چه مقدار مادهٔ رادیواکتیو در دست باشد و مشاهده در کدام فاصلهٔ زمانی ۱۰۰ ساله صورت گیرد. به این دلیل از "نیم عمر" مادهٔ رادیواکتیو به عنوان یک ویژگی ذاتی آن صحبت می‌شود، یعنی مدت زمان لازم برای اینکه جرم قطعه‌ای از این ماده به نصف تبدیل شود. به همین ترتیب در یک کشت باکتری که از تغذیهٔ کافی برخوردار باشد، در فاصلهٔ زمانی معین، مثلاً ۲۰ دقیقه، جمعیت باکتری دو برابر می‌شود زیرا که هر باکتری، مستقل از تعداد موجود باکتری‌ها، با تغذیهٔ کافی از محیط، در آن مدت زمان به دو باکتری مشابه تجزیه می‌شود. اگر کمیت مورد نظر را به عنوان تابعی از زمان، t، نمایش دهیم، $x=\varphi(t)$، نسبت $\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)}$ مستقل از t است و فقط به h بستگی دارد. اگر انبوه مادهٔ مورد نظر را عملاً کمیتی پیوسته فرض کنیم و φ را تابع مشتق‌پذیر بگیریم، مشتق $\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)}$ نسبت به t باید صفر باشد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)}\right)=0$$

$$\frac{\varphi'(t+h)\varphi(t)-\varphi(t+h)\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}=0$$

پس:

$$\frac{\varphi'(t+h)}{\varphi(t+h)}=\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$$

مستقل از اینکه h چه باشد. بنابراین کسر بالا برابر عددی ثابت λ است و با نوشتن $x=\varphi(t)$ داریم:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x \tag{۱}$$

تعبیر دیگر این رابطه این است که آهنگ تغییر کمیت x نسبت به زمان متناسب با مقدار موجود است. اگر کمیت مربوط مثبت فرض شود، مثبت بودن ثابت λ به معنای رشد کمیت است ($\frac{dx}{dt}>0$) و منفی بودن آن به معنای زوال ($\frac{dx}{dt}<0$).

رابطه (۱) نمونهٔ ساده‌ای از یک "معادلهٔ دیفرانسیل" است. مقصود از یک معادلهٔ دیفرانسیل رابطه‌ای میان تابع مجهول، مشتق آن، و متغیر مستقل است. در این مثال رابطه‌ای میان تابع $x=\varphi(t)$ و مشتق آن داده شده است و متغیر مستقل، t، به طور صریح ظاهر نمی‌شود. جواب بعضی معادلات دیفرانسیل را تابع‌های آشنا تشکیل می‌دهند و جواب بعضی دیگر تابع‌های جدیدی هستند که کوشش می‌کنیم خواص آنها را از معادلهٔ دیفرانسیل داده شده استخراج کنیم. مقصود از حل یک معادلهٔ دیفرانسیل دست یافتن به تابع یا تابع‌هایی است که در آن معادله صدق می‌کنند.

اکنون سعی می‌کنیم از دیدگاه هندسی رفتار تابع‌هایی که در (۱) صدق می‌کنند بررسی کنیم. اگر $x=\varphi(t)$ در (۱) صدق کند و (t,x) نقطه‌ای روی نمودار باشد، ضریب زاویه مماس بر نمودار در (t,x) باید λx باشد. در هر نقطهٔ (t,x) از صفحه خط راستی با ضریب زاویهٔ λx گذرا از (t,x) رسم می‌کنیم. شکل حاصل که یک "میدان خطوط راست" یا یک "میدان هادی" خوانده می‌شود نمایشگر خطوط راستی است که نمودار هر جواب بالقوهٔ (۱) باید از هر نقطه‌ای که می‌گذرد بر خط راست داده شده در آن نقطه مماس باشد. به بیانی، این میدان هدایت کنندهٔ نمودار φ است. "قضیهٔ اساسی وجود و یگانگی" جواب معادلات دیفرانسیل، که در زیر خواهد آمد، نشان می‌دهد که برای هر نقطهٔ (t_0,x_0)، تابعی $x=\varphi(t)$ وجود دارد، $\varphi:I\longrightarrow\mathbb{R}$، I یک بازه که t_0 نقطهٔ درونی آن است، $\varphi(t_0)=x_0$، و φ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل است. به علاوه، به مفهومی که در زیر خواهد آمد، فقط یک منحنی جواب از نقطهٔ (t_0,x_0) می‌گذرد. در مورد مثال مورد بحث ما، یعنی معادلهٔ (۱)، تابع ثابت صفر،

$\varphi(t) = 0$، در رابطهٔ $\varphi'(t) = \lambda\varphi(t)$ صدق می‌کند و (یگانه) جوابی است که از نقاط محور t می‌گذرد. جواب‌های دیگر یا به تمامی در $x > 0$ قرار دارند یا به تمامی در $x < 0$ و شکل آنها باید به صورت شکل ۲ باشد.

اکنون صورت "قضیهٔ اساسی" را بیان می‌کنیم. معادلهٔ کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{۲}$$

برای هر نقطهٔ (t_0, x_0) از صفحه، خط راستی گذرا از نقطهٔ (t_0, x_0) با ضریب زاویه $f(t_0, x_0)$ در نظر می‌گیریم. مقصود از یک جواب با شرط آغازی (t_0, x_0) تابعی $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ است، I یک بازهٔ شامل t_0، که $\varphi(t_0) = x_0$ و $x = \varphi(t)$ در (۲) صدق می‌کند، یعنی $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ برای هر t در I.

(۳۳–۱) **قضیهٔ وجود و یکتایی.** فرض کنید تابع f در (۲) نسبت به t پیوسته و نسبت به x دارای مشتق پیوسته است. در این صورت به‌ازای هر (t_0, x_0) جوابی با شرط آغازی (t_0, x_0) وجود دارد. به علاوه این جواب یکتاست به این مفهوم که اگر $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ دو جواب با شرط آغازی (t_0, x_0) باشند، آنگاه به‌ازای هر t در $I \cap J$ داریم $\psi(t) = \varphi(t)$.

اثبات این قضیه ابزاری فرای مطالب درس حاضر می‌طلبد. قسمت یکتایی قضیه را می‌توان در مورد معادلهٔ خاص (۱) به روش ابتدایی ثابت کرد. در حالت خاصی که $f(t, x)$ در (۲) خطی باشد، که در مورد (۱) چنین است، می‌توان حکم قوی‌تری را ثابت کرد: برای هر (t_0, x_0)، تابع یکتایی $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که جواب (۲) است و $\varphi(t_0) = x_0$، یعنی دامنهٔ جواب را می‌توان همهٔ $\mathbb{R}$ گرفت. ما از این مطلب در بحث زیر پیرامون (۱) استفاده خواهیم کرد.

(۳۳–۲) **بررسی جواب‌های (۱)** طبق بحث بالا جواب ثابت $\varphi(t) = 0$ تنها جواب (۱) است که جایی صفر می‌شود، یعنی از محور t عبور می‌کند. سایر جواب‌ها همه جا مثبت یا همه جا منفی هستند. به علاوه دامنهٔ تعریف هر جواب را می‌توان تمامی محور t فرض کرد. برای $\lambda \neq 0$، شکل تقریبی

جواب‌ها در شکل ۲ آمده است. برای $\lambda = 0$، یعنی معادلهٔ $\frac{dx}{dt} = 0$ جواب‌ها خطوط افقی (ثابت $= x$) هستند. اکنون گام به گام شناسایی بیشتری از رفتار جواب‌ها کسب می‌کنیم.

(۳۳—۲—۱) برای λ داده شده اگر $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک جواب ناصفر (۱) باشد و $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هر جواب دیگر (۱)، آنگاه عدد حقیقی c وجود دارد که $\psi = c\varphi$، و بالعکس به‌ازای هر c، $c\varphi$ نیز یک جواب است.

اثبات. اگر $\varphi'(t) = \lambda\varphi(t)$، داریم $(c\varphi)'(t) = \lambda c\varphi(t)$ یعنی حکم دوم واضح است. برای حکم اول، کافی است ثابت کنیم مشتق $\frac{\psi}{\varphi}$ نسبت به t صفر است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right) &= \frac{\psi'(t)\varphi(t) - \psi(t)\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} \\ &= \frac{\lambda\psi(t)\varphi(t) - \psi(t)\lambda\varphi(t)}{\varphi(t)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

بدین ترتیب در هر یک از دو بخش شکل ۲، هر یک از منحنی‌های ناصفر جواب را که در نظر بگیریم، هر منحنی دیگر از ضرب کردن مؤلفهٔ دوم نقاط این منحنی در یک مقدار ثابت به‌دست می‌آید بالاخص تابع ثابت صفر مضرب صفر جواب در نظر گرفته شده است.

(۳۳—۲—۲) برای λ داده شده، اگر $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک جواب (۱) باشد و a یک عدد حقیقی دلخواه، آنگاه تابع $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $\psi(t) = \varphi(t+a)$ تعریف می‌شود نیز یک جواب است.

اثبات. داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi(t)) &= \frac{d}{dt}(\varphi(t+a)) \\ &= \varphi'(t+a) \\ &= \lambda\varphi(t+a) \\ &= \lambda\psi(t) \end{aligned}$$

بدین ترتیب انتقال افقی، هر یک از جواب‌های (۱) را به جواب دیگری منتقل می‌کند. دو حکم بالا نتیجهٔ قابل توجه زیر را دارند:

(۳۳—۲—۳) برای λ داده شده فرض کنید φ جواب (۱) باشد که از (۱ ,۰) می‌گذرد، یعنی $\varphi(۰) = ۱$، آنگاه به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b) \tag{۳}$$

و

$$\varphi(a-b) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} \tag{۴}$$

اثبات. تابع ψ را در نظر بگیرید که به صورت $\psi(t) = \varphi(a+t)$ تعریف شده است. طبق ۳۳—۲—۲، ψ یک جواب است و طبق ۳۳—۲—۱، این جواب باید به شکل $c\varphi(t)$ برای ثابت مناسب c باشد

$$\varphi(t+a) = c\varphi(t)$$

این تساوی به‌ازای هر t برقرار است، پس به‌ازای $t = ۰$ داریم:

$$\varphi(a) = c\varphi(۰) = c$$

بنابراین

$$\varphi(t+a) = \varphi(a)\varphi(t)$$

و (۳) به اثبات می‌رسد. همچنین رابطهٔ (۴) با طرفین‌ـ وسطین از (۳) به‌دست می‌آید.

حال همچنان فرض کنید φ جوابی از (۱) است (برای λ داده شده) که $\varphi(۰) = ۱$. برای اعداد صحیح مثبت n با استقراء از (۳) نتیجه می‌شود که:

$$\varphi(na) = \varphi(a)^n \tag{۵}$$

از آنجا که $\varphi(0) = 1$، به طور کلی از (۴) داریم $\varphi(-t) = \varphi(t)^{-1}$، پس از (۵) نتیجه می‌شود که:

$$\varphi(-na) = \varphi(a)^{-n} \tag{6}$$

در (۵) اگر به جای a، مقدار $\frac{a}{n}$ را جایگزین کنیم حاصل می‌شود

$$\varphi(\frac{a}{n}) = \varphi(a)^{\frac{1}{n}} \tag{7}$$

این رابطه برای هر عدد صحیح مثبت یا منفی درست است زیرا که $\varphi(-t) = \varphi(t)^{-1}$. با جایگزینی ma برای a در (۷) و با استفاده از (۵) و (٦) نتیجه می‌شود که برای هر عدد گویای $\frac{m}{n}$:

$$\varphi(\frac{m}{n}a) = \varphi(a)^{\frac{m}{n}} \tag{8}$$

از رابطهٔ اخیر شناسایی قابل توجهی نسبت به جواب‌های (۱) حاصل می‌شود. همچنان فرض می‌کنیم $\varphi(0) = 1$ که (۸) برقرار باشد. مقدار $\varphi(1)$ را به b نمایش می‌دهیم. نتیجه می‌شود:

$$\varphi(\frac{m}{n}) = b^{\frac{m}{n}} \tag{9}$$

بدین ترتیب جواب (۱) که از $(0, 1)$ می‌گذرد، یعنی $\varphi(0) = 1$، به‌ازای مقادیر گویای t برابر b^t است که در آن b عددی حقیقی (برابر $\varphi(1)$) است. اگر عدد حقیقی b داده شده باشد b^t برای هر عدد گویای $t = \frac{m}{n}$ از جبر دبیرستان معنی‌دار بوده است، $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$. اکنون می‌توانیم با تعریف b^t به صورت $\varphi(t)$ تابعی مشتق‌پذیر به‌دست آوردیم که به‌ازای مقادیر گویا همان مقدار آشنای $b^{\frac{m}{n}}$ را دارد و به‌ازای اعداد ناگویا نیز دارای معنی شده است. یادآوری می‌کنیم که φ آن جواب (۱) است که $\varphi(0) = 1$، و نیز b برابر $\varphi(1)$ اتخاذ شده است. سؤالی که اکنون می‌توان مطرح کرد این است که چه رابطه‌ای بین b و λ وجود دارد و اساساً برای هر b داده شده، آیا می‌توان λ را طوری تعیین کرد که برای جواب φ از معادلهٔ (۱) با $\varphi(0) = 1$ داشته باشیم $\varphi(1) = b$؟ از آنجا که جواب‌های (۱) همه جا منفی یا همه جا مثبت هستند نتیجه می‌شود که لازم است در این بحث b مثبت باشد زیرا جواب با شرط

$\varphi(0) = 1$ در $x > 0$ قرار دارد. قبل از ادامه اصطلاح "تابع نمایی" را معرفی می‌کنیم. جواب‌های φ از (۱)، به‌ازای کلیهٔ مقادیر λ، که از $(0, 1)$ می‌گذرند، یعنی $\varphi(0) = 1$ تابع‌های نمایی خوانده می‌شوند.

ادامه بحث را با توجه ویژه به حالت $\lambda = 1$ آغاز می‌کنیم. جواب (۱) به‌ازای $\lambda = 1$ که از $(0, 1)$ می‌گذرد را به exp نمایش می‌دهیم. پس $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای این ویژگی‌هاست:

$$\exp'(x) = \exp(x) \tag{10}$$

$$\exp(0) = 1 \tag{11}$$

حال اگر $\exp(1)$ را به e نمایش دهیم، طبق بحث قبل داریم:

$$\exp(t) = e^t \tag{12}$$

همان طور که قبلاً گوشزد کردیم، این رابطه برای t گویا از (۸) یا (۹) نتیجه شد و برای t ناگویا به عنوان تعریف e^t اتخاذ می‌شود. چون در اینجا $\lambda = 1 > 0$، جواب‌های (۱) صعودی هستند، پس قطعاً $e > 1$ زیرا که $\exp(0) = 1$. لازم است تخمین بهتری از عدد e (که به احترام ریاضیدان بزرگ سوییسی اویلر نامگذاری شده است) در دست داشته باشیم زیرا که این عدد از ثابت‌های بنیادی ریاضیات و علم است.

به منظور یافتن مقداری تقریبی برای e، از چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع exp استفاده می‌کنیم. از آنجا که مشتق kـ ام exp با استفادهٔ مکرر از (۱۰) برابر خود exp است، و $\exp(0) = 1$، چندجمله‌ای تیلور درجهٔ n تابع exp برابر است با:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

بنابراین تقریب $e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$، به‌ازای هر n، معقول به نظر می‌رسد. خطای این تقریب

طبق قضیهٔ لاگرانژ برابر است با $\frac{۱}{(n+۱)!}\exp(\xi)$ که در آن ξ بین ۰ و ۱ است:

$$\exp(۱) = e = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \frac{۱}{(n+۱)!}\exp(\xi)$$

حال $\exp$ تابعی صعودی است، پس $۱ = \exp(۰) < \exp(\xi) < \exp(۱) = e$، بنابراین:

$$\begin{aligned} &\tfrac{۱}{(n+۱)!} < e - (۱ + \tfrac{۱}{۱!} + \cdots + \tfrac{۱}{n!}) < \tfrac{e}{(n+۱)!} \\ &۱ + \tfrac{۱}{۱!} + \cdots + \tfrac{۱}{(n+۱)!} < e < \frac{۱+\frac{۱}{۱!}+\cdots+\frac{۱}{n!}}{۱-\frac{۱}{(n+۱)!}} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

مثلاً برای $n = ۱$، تقریب

$$۲/۵ < e < ۴$$

و برای $n = ۲$ تقریب بهتر:

$$۲/٦٦٦ < e < ۳$$

به‌دست می‌آید. در واقع می‌توان ثابت کرد که e یک عدد ناگویا است که بسط اعشاری آن تا دوازده رقم پس از اعشار به این صورت است:

$$e \simeq ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹$$