پنج قضیه کلاسیک (۲)[1]

به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ کلاسیک سوم دیدیم که اگر تابعی $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ در یک نقطهٔ درونی I دارای بیشینه یا کمینهٔ موضعی بوده و در آن نقطه مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق در آن نقطه صفر است. یک کاربرد مفید این مطلب قضیهٔ چهارم است.

(۲۷—۱) قضیهٔ رل. فرض کنید $a < b$، $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ در سراسر $[a, b]$ پیوسته و در $]a, b[$ مشتق‌پذیر است، و $f(a) = f(b) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f'(c) = 0$.

اثبات. اگر f در $[a, b]$ ثابت باشد که $f'(c) = 0$ برای هر نقطه c در دامنهٔ f. در غیر این صورت نقطه‌ای x در $]a, b[$ وجود دارد که $f(x) \neq 0$. طبق ۲۶—۲ از جلسهٔ قبل، تابع دارای یک نقطهٔ بیشینه و یک نقطه کمینه در $[a, b]$ است. چون در نقطه‌ای x از $]a, b[$ تابع صفر نیست، دست کم در یکی از دو نقطهٔ بیشینه یا کمینه تابع باید ناصفر باشد. بنابراین این نقطهٔ درونی است و طبق نتیجهٔ ۲۶—۴ مشتق تابع در این نقطه باید صفر باشد. ■

تعمیم زیر از قضیهٔ رل پنجمین قضیهٔ مورد نظر ما در این بحث است:

(۲۷—۲) قضیه میانگین. فرض کنید $a < b$، $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ در سراسر $[a, b]$ پیوسته و در $]a, b[$ مشتق‌پذیر است. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < b$، که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

[1] درس این جلسه عمدتاً توسط آقای یحیی تابش ارائه شد.

تجسم هندسی حکم بدین صورت است که طرف راست رابطهٔ (۱)، شیب خط راستی است که دو انتهای نمودار f را به هم وصل می‌کند. طبق قضیه نقطه (یا نقاطی) بین دو انتها موجود است که مماس بر نمودار در آن نقطه موازی خط واصل بین دو انتهاست. اصطلاح "میانگین" به $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ به عنوان تغییر متوسط f در $[a,b]$ اطلاق می‌شود. توجه کنید که قضیهٔ رل در واقع حالت خاصی از این قضیه است.

اثبات. با کم کردن مقدار تابع مستوی که نمودارش خط راست واصل بین دو انتهاست از مقدار f، مطلب را به قضیهٔ رل تحویل می‌کنیم. تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$$

توجه کنید که $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ معادلهٔ خط راست گذرا از دو انتهای نمودار f است. داریم:

$$g(a)=g(b)=0$$

به علاوه یک تابع مستوی به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است، پس g نیز مانند f در $[a,b]$ پیوسته و در $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. بنابراین از قضیهٔ رل نتیجه می‌شود که نقطه‌ای c وجود دارد $a<c<b$، که $g'(c)=0$. ولی:

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. ■

اکنون به ذکر چند نمونه کاربرد این قضیه می‌پردازیم.

(۳–۲۷) فرض کنید $a<b$ و $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در $]a,b[$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=0$ برای هر $x\in]a,b[$. در این صورت f در سراسر $[a,b]$ ثابت است.

اثبات. فرض کنید x_1 و x_2 دو نقطهٔ دلخواه $[a,b]$ باشند، $x_1<x_2$. طبق قضیه نقطه‌ای c بین x_1 و x_2 وجود دارد که $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0$، پس $f(x_1)=f(x_2)$ برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 در $[a,b]$. ■

(۲۷—۴) فرض کنید $a < b$ و $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند که در $]a, b[$ مشتق‌پذیرند. اگر برای هر x در $]a, b[$ داشته باشیم $f'(x) = g'(x)$، آنگاه عددی ثابت C وجود دارد که $g(x) = f(x) + C$ برای هر x.

اثبات. تابع $h(x) = g(x) - f(x)$ در شرایط (۲۷—۳) صدق می‌کند، پس برابر یک مقدار ثابت است. ■

(۲۷—۵) فرض کنید $a < b$ و $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در $]a, b[$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) > \circ$ برای هر $x \in]a, b[$. در این صورت f تابعی صعودی است، یعنی برای $a \leq x_۱ < x_۲ \leq b$ داریم $f(x_۱) < f(x_۲)$.

اثبات. مانند اثبات قبل، نقطه‌ای c وجود دارد، $x_۱ < c < x_۲$ که $\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = f'(c) > \circ$ پس $f(x_۱) < f(x_۲)$. ■

مشابهاً اگر مشتق در سراسر $]a, b[$ منفی باشد، نزولی بودن f در $[a, b]$ نتیجه می‌شود. همچنین $f'(x) \geq \circ$ (به ترتیب $f'(x) \leq \circ$) برای هر x در $]a, b[$، نتیجه می‌دهد که f غیرنزولی (به ترتیب غیرصعودی) است، یعنی $x_۱ \leq x_۲$ نتیجه می‌دهد $f(x_۱) \leq f(x_۲)$ (به ترتیب $f(x_۱) \geq f(x_۲)$). لازم به ذکر است که همچنان که در مثالی در جلسهٔ قبل دیدیم، مثبت بودن مشتق f تنها در یک نقطه $x_\circ$، فقط مقایسه‌ای بین مقادیر تابع در نقطهٔ $x_\circ$ و نقاط مجاور می‌دهد ولی مقایسه‌ای بین مقادیر دو نقطهٔ نزدیک به $x_\circ$ به‌دست نمی‌دهد.

در کاربرد اخیر از قضیهٔ میانگین به صورت یک نامساوی استفاده شد. در واقع بیشترین استفاده‌ها از این قضیه به صورت یک نامساوی است. قضیهٔ میانگین را می‌توان حکمی در مورد نمو تابع، یعنی $f(b) - f(a)$ دانست وقتی متغیر x از a به b تغییر می‌کند. نسبت تغییر مقدار تابع به تغییر متغیر، یعنی $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ برابر $f'(c)$، یعنی مقدار مشتق در یک نقطهٔ بینی است. حال اگر تخمینی برای مقدار مشتق در $]a, b[$ داشته باشیم، می‌توان حدود $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ را نیز تخمین زد. مثلاً اگر بدانیم $m \leq f'(x) \leq M$

برای $x \in]a,b[$، آنگاه نتیجه می‌شود که:

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$$

مثال. ثابت می‌کنیم $|\sin x| \leq |x|$. اگر $x \neq ۰$، طبق قضیهٔ میانگین، نقطه‌ای c بین ۰ و x وجود دارد که:

$$\frac{\sin x - \sin ۰}{x - ۰} = \sin'(c) = \cos(c)$$

از آنجا که $|\cos x| \leq ۱$، نتیجه می‌شود که $\frac{|\sin x|}{|x|} \leq ۱$.

برای بعضی مقاصد تعمیمی از قضیهٔ میانگین به نام "قضیه میانگین کوشی" مورد نیاز است که در آن دو تابع تواماً دخیل می‌شوند.

(۲۷–۶) قضیهٔ میانگین کوشی. فرض کنید $a < b$، $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ در سراسر $[a,b]$ پیوسته و در نقاط $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت نقطه‌ای c در $]a,b[$ وجود دارد که $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.

اثبات. تابع $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$

φ روی $[a,b]$ پیوسته و در $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. به علاوه

$$\varphi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = \varphi(b)$$

پس طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $\varphi'(c) = ۰$، یعنی:

$$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = ۰$$

که حکم مورد نظر است. ■

در حالت خاصی که $g(a) \neq g(b)$ و g' در سراسر $]a,b[$ ناصفر باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

گزارهٔ زیر بعضی اوقات در اثبات مشتق‌پذیری یک تابع در نقطهٔ خاص مورد استفاده قرار می‌گیرد:

(۷−۲۷) فرض کنید I یک بازه باشد، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته که در همهٔ نقاط I به استثنای احتمالاً نقطه‌ای $x_\circ$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{x\to x_\circ} f'(x)$ وجود داشته و برابر A باشد، آنگاه f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(x_\circ) = A$.

استدلال نشان خواهد داد که این حکم حتی برای نقاط انتهایی بازهٔ I وقتی مشتق را به صورت یک طرفه منظور کنیم نیز صادق است.

اثبات. نخست نشان می‌دهیم $\lim_{h\to\circ^+} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ وجود دارد (مشروط بر این که f در بازه‌ای به طرف راست $x_\circ$ تعریف شده باشد). چون f در $]x_\circ, x_\circ + h[$ مشتق‌پذیر است، طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c وجود دارد $x_\circ < c < x_\circ + h$ که $\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} = f'(c)$. وقتی $h \longrightarrow \circ^+$، $c \longrightarrow x_\circ^+$، و چون $\lim_{x\to x_\circ} f'(x) = A$، نتیجه می‌شود که $\lim_{h\to\circ^+} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} = \lim_{c\to x_\circ^+} f'(c) = A$. مشابهاً حالت $h \longrightarrow \circ^-$ نیز ثابت می‌شود و روشن است که استدلال برای مشتق یک طرفه نیز برقرار است. ■

گزارهٔ بالا نشان می‌دهد که اگر تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد ولی f' در $x_\circ$ پیوسته نباشد این ناپیوستگی نمی‌تواند به سبب نابرابری $\lim_{x\to x_\circ^+} f'(x)$ و $\lim_{x\to x_\circ^-} f'(x)$ باشد چون اگر این دو هر دو موجود باشند، طبق گزاره بالا مشتق‌های راست و چپ موجودند، و چون f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر فرض شده است باید مشتق‌های راست و چپ برابر باشند، و در نتیجه f' در $x_\circ$ پیوسته می‌شود. بدین ترتیب اگر f' در $x_\circ$ ناپیوسته باشد، این ناپیوستگی باید شیوه‌ای پیچیده‌تر داشته باشد. مثال زیر نمونه‌ای را نشان می‌دهد:

مثال. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} \sin \frac{۱}{x} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

نشان می‌دهیم f در 0 مشتق‌پذیر است:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}\end{aligned}$$

از آنجا که $|\sin\frac{1}{h}|\leq 1$ و $h\longrightarrow 0$، حد فوق وجود دارد و برابر صفر است. از طرفی دیگر، اگر $x\neq 0$:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

وقتی $x\longrightarrow 0$، عبارت $2x\sin\frac{1}{x}$ به صفر میل می‌کند ولی $\cos\frac{1}{x}$ حد ندارد (بین -1 و 1 نوسان می‌کند). در شکل ۲ نمودار f و f' نمایش داده شده و نحوهٔ ناپیوستگی f' دیده می‌شود.

از این بحث بر می‌آید که مشتق یک تابع پیوسته از ویژگی‌های خاصی باید برخوردار باشد. یکی از بارزترین این ویژگی‌ها "ویژگی مقدار بینی" است که در گزارهٔ زیر می‌آید:

(۸—۲۷) گزاره. فرض کنید $a<b$ و $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد (در نقاط انتهایی مشتق یک طرفه منظور می‌شود) و $f'(a)\neq f'(b)$. در این صورت برای هر C بین $f'(a)$ و $f'(b)$ نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که $f'(c)=C$.

اثبات. دو تابع $g,h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x>a\\ f'(a) & x=a\end{cases}\qquad,\qquad h(x)=\begin{cases}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} & x<b\\ f'(b) & x=b\end{cases}$$

توجه کنید که g و h هر دو در $[a,b]$ پیوسته‌اند زیرا که مقدار g در a برابر $\lim_{x\to a^+}g(x)$ است و مقدار h در b برابر $\lim_{x\to b^-}h(x)$. حال اگر C مقداری بین $f'(a)$ و $f'(b)$ باشد، از پیوستگی g و h و این که $g(b)=h(a)$ نتیجه می‌شود که یا c_1 در $[a,b]$ وجود دارد که $g(c_1)=C$ و یا c_2 در $[a,b]$ وجود دارد که $h(c_2)=C$:

$$\frac{f(c_1)-f(a)}{c_1-a}=C\qquad \text{یا}\qquad \frac{f(b)-f(c_2)}{b-c_2}=C$$

پس با به‌کار گرفتن قضیهٔ میانگین، یا نقطه‌ای c بین c_1 و a و یا نقطه‌ای c بین c_2 و b که $f'(c)=C$. ■