پنج قضیهٔ کلاسیک

قبل از ادامهٔ بحث در مورد تابع‌های چندمتغیری، لازم است با موشکافی بیشتر تابع‌های پیوسته و مشتق‌پذیر یک متغیری را بررسی کنیم. بعضی نتایج که از این بررسی به‌دست می‌آیند کلید مطالعهٔ عمیق‌تر توابع چندمتغیری نیز هستند. در این جلسه و جلسهٔ بعد پنج قضیه اساسی را در این زمینه مورد بحث قرار می‌دهیم.

(۲۶–۱) قضیه مقدار بینی. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد با این ویژگی که $f(a) < ۰$ و $f(b) > ۰$. در این صورت نقطه‌ای c در $[a,b]$ هست که $f(c) = ۰$.

قبل از ارائه اثبات این قضیه، به چند نکته اشاره می‌کنیم. اول این که حکم کلی‌تری به سادگی از این صورت قضیه نتیجه می‌شود. بدین صورت که اگر $f(a) = A$، $f(b) = B$ و $A \neq B$، آنگاه به‌ازای هر C بین A و B نقطه‌ای c در $[a,b]$ وجود دارد که $f(c) = C$. مثلاً اگر $A < B$ و $A < C < B$، با در نظر گرفتن تابع $g(x) = f(x) - C$ و به‌کار گرفتن ۲۶–۱ در مورد g، حکم اخیر به‌دست می‌آید. وقتی $A < B$، $B < C < A$، می‌توان از $g(x) = C - f(x)$ استفاده کرد.

نکتهٔ دیگر این که کافی است حکم برای بازهٔ $[۰,۱]$ ثابت شود زیرا اگر تابع $g : [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $g(t) = f((۱-t)a + tb)$ تعریف کنیم، داریم $g(۰) = f(a)$، و $g(۱) = f(b)$، پس اگر نقطه‌ای $t_۰$ در $[۰,۱]$ وجود داشته باشد که $g(t_۰) = ۰$، با قرار دادن $c = (۱-t_۰)a + t_۰b$، داریم $f(c) = ۰$. این استدلال را می‌توان به عنوان انتقال مبدأ به نقطهٔ a و تغییر مقیاس از واحد به $(b-a)$ تلقی کرد.

بدین ترتیب اکنون فرض می‌کنیم $f : [۰, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است، $f(a) < ۰$ و $f(b) > ۰$. نشان می‌دهیم نقطه‌ای c در $[۰, ۱]$ وجود دارد که $f(c) = ۰$. برای این کار از مبنای ۲ برای نمایش اعداد در بازهٔ $[۰, ۱]$ استفاده می‌کنیم. هر عدد در $[۰, ۱]$ نمایشی به صورت $۰/a_۱a_۲a_۳\ldots$ دارد. نقطهٔ ۱ را می‌توان به صورت $۰/۱۱۱\ldots$ نوشت. به طور کلی بعضی اعداد دو نمایش مختلف دارند. هرگاه از یک مکان به بعد همهٔ ارقام ۱ باشند، می‌توان ۱ ها را به صفر تبدیل کرد و رقم قبل را از صفر به یک تغییر داد. روشی برای اثبات به کار خواهیم برد که عددی $c \equiv ۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ تولید می‌کند با این ویژگی که $f(c) = ۰$. ارقام $c_۱$، $c_۲$، ... را به ترتیب تعیین خواهیم کرد. نخست بازهٔ $[۰, ۱]$ را به دو بازهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ تجزیه می‌کنیم. اگر $f(\frac{۱}{۲}) = ۰$ که نقطه‌ای مورد نظر به‌دست آمده است، $c = ۰/۱۰۰\ldots$. در غیر این صورت $f(\frac{۱}{۲})$ مثبت یا منفی است. اگر $f(\frac{۱}{۲}) > ۰$ قرار می‌دهیم $c_۱ = ۰$ و اگر $f(\frac{۱}{۲}) < ۰$ قرار می‌دهیم $c_۱ = ۱$. توجه کنید که بدین معنی است که در دو سر $[۰, \frac{۱}{۲}]$ علامت مقدار f متفاوت است، پس انتظار داریم نقطه‌ای مطلوب در $[۰, \frac{۱}{۲}]$ به‌دست آید، و از این رو رقم اول پس از ممیز c را طوری می‌گیریم $(c_۱ = ۰)$ که c در $[۰, \frac{۱}{۲}]$ قرار گیرد. بالعکس وقتی $f(\frac{۱}{۲}) < ۰$، نقطهٔ c را در $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ جستجو می‌کنیم و اعداد این بازه آنهایی هستند که رقم اول پس از ممیز آنها ۱ است. بازهٔ انتخاب شده را $I_۱$ می‌نامیم. حال $I_۱$ را به دو بازهٔ هم طول تقسیم می‌کنیم. برای اعداد بازهٔ سمت چپ رقم دوم صفر است و برای بازهٔ سمت راست، رقم دوم یک می‌باشد. اگر m نقطهٔ وسط بازهٔ $I_۱$ باشد در صورتی که $f(m) = ۰$، نقطهٔ مطلوب به‌دست آمده است که در واقع برابر $c = ۰/c_۱۱۰۰\ldots$ است. در غیر این صورت علامت $f(m)$ را با علامت دو سر $I_۱$ مقایسه می‌کنیم که در سمت چپ منفی و در سمت راست مثبت است. اگر $f(m) > ۰$ قرار می‌دهیم $c_۲ = ۰$ و بازهٔ سمت چپ را $I_۲$ می‌نامیم. بالعکس اگر $f(m) < ۰$، قرار می‌دهیم $c_۲ = ۱$ و بازهٔ سمت راست را $I_۲$ می‌نامیم. بدین ترتیب بازه‌ای به طول $\frac{۱}{۴}$ به‌دست آورده‌ایم که در سمت چپ آن تابع f منفی و در سمت راست آن مثبت است. به جستجوی نقطه‌ای c هستیم که در دو رقم اول پس از ممیز آن $c_۱$ و

$c_۲$، طوری انتخاب شده‌اند که در این بازه قرار گیرد. استدلال را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. اگر در گام n، نقطهٔ وسط بازه، m، طوری بود که $f(m) = ۰$، نقطه مطلوب به‌دست آمده است و برابر است با $m = ۰/c_۱ \ldots c_{n-۱}۱۰۰\ldots$. در غیر این صورت یکی از دو بخش بازه به ترتیبی که ذکر شد انتخاب می‌شوند و رقم c_n برابر صفر یا یک گرفته می‌شود بسته به این که بازهٔ چپ یا بازهٔ راست انتخاب شده است. ادعا می‌کنیم عدد $c = ۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ که بدین ترتیب به‌دست می‌آید ویژگی مطلوب را دارد، یعنی $f(c) = ۰$. اثبات به روش برهان خلف است. فرض کنید $f(c) \neq ۰$، مثلاً $f(c) > ۰$. استدلال در حالت $f(c) < ۰$ کاملاً مشابه است. چون f در c پیوسته است (و این تنها جایی در اثبات است که از پیوستگی f استفاده می‌کنیم)، بازه‌ای باز J به مرکز c وجود دارد، $J =]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$، که به‌ازای هر $x \in J$، داریم $f(x) > ۰$. حال نقطهٔ c در همهٔ I_n ها قرار گرفته است و طول I_n برابر $\frac{۱}{۲^n}$ است، پس برای n به‌اندازهٔ کافی بزرگ $\frac{۱}{۲^n} < \varepsilon$ و I_n به تمامی در J قرار می‌گیرد. بنابراین f در سراسر I_n مثبت است ولی این با انتخاب I_n متناقض است زیرا I_n طوری انتخاب شد که f در دو انتهای آن علامت متفاوت دارد. این تناقض نشان می‌دهد $f(c) > ۰$ غیرممکن است. به همین ترتیب $f(c) < ۰$ منجر به تناقض می‌شود و لذا $f(c) = ۰$. ■

برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، نقطه $a \in S$ یک نقطهٔ بیشینه (به ترتیب نقطهٔ کمینه) است در صورتی که $f(a) \geq f(x)$ (به ترتیب $f(a) \leq f(x)$) برای هر $x \in S$. اکنون دومین قضیهٔ کلاسیک مورد بحث را بیان و ثابت می‌کنیم:

(۲۶–۲) اگر $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد f دارای نقطه بیشینه و نقطهٔ کمینه در $[a, b]$ است.

اثبات. وجود نقطهٔ بیشینه را ثابت می‌کنیم، وجود نقطهٔ کمینه به طریق مشابه ثابت می‌شود. باید نقطه‌ای c در $[a, b]$ پیدا کنیم که $f(c) \geq f(x)$ برای هر x در $[a, b]$. همچنان که در اثبات ۱۶–۱ عمل کردیم، فرض می‌کنیم $[a, b] = [۰, ۱]$ زیرا با در نظر گرفتن $g(t) = f((۱ - t)a + tb)$،

$g : [۰, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$، مقادیر تابع f روی بازهٔ $[۰, ۱]$ منتقل می‌شوند. در اینجا نیز از نمایش اعداد به مبنای ۲ استفاده می‌کنیم و عددی $c = ۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ تولید می‌کنیم که نقطهٔ بیشینه است. قرار دهید $I_۰ = [۰, ۱]$، $I'_۰ = [۰, \frac{۱}{۲}]$ و $I''_۰ = [\frac{۱}{۲}, ۱]$. ادعا می‌کنیم (دست کم) یکی از دو زیربازهٔ $I'_۰$ یا $I''_۰$ دارای ویژگی زیر است:

* هیچ نقطه‌ای $t_۰$ از این زیربازه وجود ندارد که برای هر t در زیربازهٔ دیگر $f(t_۰) > f(t)$.

اگر یک بازه فاقد این ویژگی باشد، این بازه شامل نقطه‌ای $t_۰$ است که $f(t_۰)$ اکیداً بزرگتر از $f(t)$ برای هر t در بازهٔ دیگر است، پس بازهٔ دیگر نمی‌تواند نقطه‌ای با این شرط داشته باشد، یعنی برای بازهٔ دوم (*) برقرار است. بنابراین این ادعا که (*) برای دست کم یکی از دو زیربازهٔ $I'_۰$ و $I''_۰$ برقرار است معتبر است. حال زیربازه‌ای که دارای این ویژگی است در نظر می‌گیریم (در صورتی که هر دو این ویژگی را داشته باشند یکی را به دلخواه اختیار می‌کنیم) و بازه دیگر را $I_۱$ می‌نامیم. اگر $I_۱$ زیربازهٔ طرف چپ، یعنی $[۰, \frac{۱}{۲}]$، باشد، رقم اول عدد مورد نظر c را برابر ۰ می‌گیریم و اگر $I_۱$ زیربازهٔ طرف راست یعنی $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ باشد، رقم اول c را برابر ۱ اختیار می‌کنیم. بدین ترتیب $c_۱ = ۱$ اولین رقم پس از ممیز نقطهٔ مورد نظر خواهد بود.

حال دامنهٔ f را به $I_۱$ محدود می‌کنیم و $I_۱$ را از وسط به دو بازهٔ $I'_۱$ (سمت چپ) و $I''_۱$ (سمت راست) تجزیه می‌کنیم. مجدداً ادعا می‌کنیم که برای تحدید f به $I_۱$، (دست کم) یکی از دو زیربازهٔ $I'_۱$ یا $I''_۱$ دارای ویژگی (*) است. دلیل عیناً مانند گام قبلی است. حال زیربازه‌ای که دارای این ویژگی است (یا یکی از آنها در صورتی که هر دو این ویژگی را داشته باشند) در نظر گرفته، بازه دیگر را $I_۲$ می‌نامیم. اگر $I_۲$ زیربازهٔ سمت چپ باشد قرار می‌دهیم $c_۲ = ۰$ و اگر $I_۲$ زیربازهٔ سمت راست باشد، $c_۲$ را برابر ۱ می‌گیریم. با ادامهٔ این فرایند، رقم‌های c_n انتخاب می‌شوند و نقطه‌ای $c = ۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ در $[۰, ۱]$ به‌دست می‌آید. ادعا می‌کنیم c یک نقطهٔ بیشینه است.

نقطه‌ای دلخواه $d = ۰/d_۱d_۲d_۳\ldots$ در $[۰, ۱]$ می‌گیریم (بسط d به مبنای ۲ است)، باید ثابت کنیم $f(c) \geq f(d)$. اگر چنین نباشد، $f(d) > f(c)$. نشان می‌دهیم این فرض منجر به تناقض می‌شود. قرار دهید $e = f(d) - f(c) > ۰$. بنابر پیوستگی f در c، عددی $e' > ۰$ وجود دارد که:

$$\forall x \in J =]۰, ۱[\cap]c - e', c + e'[: \ |f(x) - f(c)| < e$$

بالاخص:

$$\forall x \in J = [۰, ۱] \cap]c - e', c + e'[: \ f(x) < f(c) + e \qquad (۱)$$

حال چون $d \neq c$ (فرض شد $f(d) > f(c)$) در بسط مبنای دوی دو عدد دست کم یک رقم متفاوت وجود دارد. فرض کنید رقم $n_۱$ ام اولین رقمی است که در آن c و d متفاوتند:

$$\forall i < n : c_i = d_i \quad , \quad c_{n_۱} \neq d_{n_۱}$$

این نشان می‌دهد که در مرحلهٔ $n_۱$ ام تقسیم نقطهٔ d در بازه‌ای قرار گرفته که حذف شده است، $d \notin I_{n_۱}$ زیرا $c_{n_۱}$ رقم $n_۱$ ام نقاط بازهٔ $I_{n_۱}$ است. طبق شرط $(*)$، نقطه‌ای d' در $I_{n_۱}$ وجود دارد که:

$$f(d') \geq f(d)$$

d' در همهٔ ارقام تا رقم $n_۱$ (و با شمول آن) با c یکی است. اگر $d' = c$ به تناقض می‌رسیم چون فرض کرده‌ایم $f(d) > f(c)$. پس فرض کنید $d' \neq c$. بنابراین اگر d' را در مبنای ۲ به صورت $d' = ۰/d'_۱d'_۲\ldots$ بنویسیم یکی از d'_k ها باید متفاوت از c_k باشد. فرض کنید رقم $n_۲$ ام اولین رقمی است که در آن c و d' متفاوتند. لزوماً $n_۲ > n_۱$ زیرا که d' و c تا رقم $n_۱$ برابر بودند. مجدداً این نشان می‌دهد که طبق $(*)$ نقطهٔ d' در تقسیم مرحلهٔ $n_۲$ حذف شده است و نقطه‌ای d'' در $I_{n_۲}$ وجود دارد که

$$f(d'') > f(d')$$

این استدلال را ادامه می‌دهیم و دنباله‌ای از نقاط $d, d', d'', \ldots, d^{(k)}, \ldots$ به‌دست می‌آید که

$$f(c) < f(d) \leq f(d') \leq f(d'') \leq \cdots \qquad (۲)$$

از طرفی دیگر چون $d^{(k)}$ تا مرحلهٔ n_k ارقام برابر c دارد، $|c - d^{(k)}| \leq ۲^{-n_k}$ و

$$n_۱ < n_۲ < n_۳ < \cdots$$

نتیجه این که اگر k به اندازه کافی بزرگ اختیار شود، داریم $|c - d^{(k)}| < e'$ و بنابر (۱):

$$f(d^{(k)}) < f(c) + e = f(d)$$

که در تناقض با (۲)است. بدین ترتیب فرض $f(d) > f(c)$ منجر به تناقض گردید، باید داشته باشیم $f(c) \geq f(d)$، یعنی c یک نقطهٔ بیشینه است. ■

(۲۶–۳) علامت مشتق. فرض کنید I یک بازهٔ باز است، $a \in I$، و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی است که در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. اگر $f'(a) \neq ۰$، بازه‌ای باز J وجود دارد، $a \in J \subset I$ که:

الف) اگر $f'(a) > ۰$، برای $x \in J$ داریم $f(x) > f(a)$ اگر $x > a$ و $f(x) < f(a)$ اگر $x < a$.

ب) اگر $f'(a) < ۰$، برای $x \in J$ داریم $f(x) < f(a)$ اگر $x > a$ و $f(x) > f(a)$ اگر $x < a$.

اثبات. حکم (الف) را ثابت می‌کنیم، اثبات حکم (ب) کاملاً مشابه است. فرض کنید

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > ۰$$

برای $e = f'(a)$، طبق تعریف حد، عددی $e' > ۰$ وجود دارد که $۰ < |x - a| < e'$، $x \in I$، نتیجه می‌دهد

$$|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)| < f'(a)$$

پس اگر قرار دهیم $J = I \cap]a - e', a + e'[$، برای $x \in J$ داریم:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > ۰$$

بنابراین صورت و مخرج باید هم علامت باشند و حکم (الف) نتیجه می‌شود. ■

توجه کنید که این گزاره فقط در مورد مقایسهٔ مقدار f در نقطهٔ a با مقدار f در نقاط مجاور است و هیچ‌گونه حکمی در مورد مقایسهٔ مقادیر f در دو نقطهٔ مجاور a نمی‌کند. به عنوان مثال، تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} + x^{۲} \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۱ نمایش داده شده است. داریم:

$$\begin{aligned} f'(۰) &= \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{x}{۲} + x^{۲} \sin \frac{۱}{x} - ۰}{x} \\ &= \lim_{x \to ۰} (\frac{۱}{۲} + x \sin \frac{۱}{x}) \end{aligned}$$

چون $|\sin \frac{۱}{x}| \leq ۱$، $|x \sin \frac{۱}{x}| \leq |x|$ و $\lim_{x \to ۰} |x \sin \frac{۱}{x}| = ۰$، پس $f'(۰) = \frac{۱}{۲} > ۰$. همچنان که از شکل پیداست برای مقادیر $|x|$ کوچک، $f(۰) = ۰ < f(x)$ اگر $x > ۰$ و $f(۰) = ۰ > f(x)$ ولی در مورد دو مقدار مثبت (یا دو مقدار منفی) $x_۱$ و $x_۲$، نمی‌توان هیچ‌یک از دو حکم کلی $f(x_۱) < f(x_۲)$ یا $f(x_۲) < f(x_۱)$ را در نزدیکی ۰ ابراز کرد.

به طور کلی اگر $S \subset \mathbb{R}^n$ و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، نقطهٔ $a \in S$ را یک ماکسیمم (بیشینه) موضعی تابع f می‌نامیم در صورتی که گوی بازی B حول a وجود داشته باشد که برای هر $x \in B \cap S$ داشته باشیم $f(a) \geq f(x)$. به همین ترتیب نقطهٔ مینیمم (کمینهٔ) موضعی تعریف می‌شود. اصطلاح فرینه (اکسترمم) برای بیشینه یا کمینه به‌کار می‌رود. از (۲۶—۲) نتیجه می‌گیریم که:

(۲۶—۳) نتیجه. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}$، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ و f در نقطهٔ درونی a از S دارای فرینهٔ موضعی باشد. در این صورت اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، داریم $f'(a) = ۰$. ■