مشتق به عنوان تقریب خطی (۲)

یادآوری می‌کنیم که مشتق‌پذیری تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، در نقطهٔ a از S بدین معنی است که تابعی مستوی $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} A(a) = f(a) \\ \lim_{x \to a} \frac{|f(x) - A(x)|}{|x-a|} = ۰ \end{cases}$$

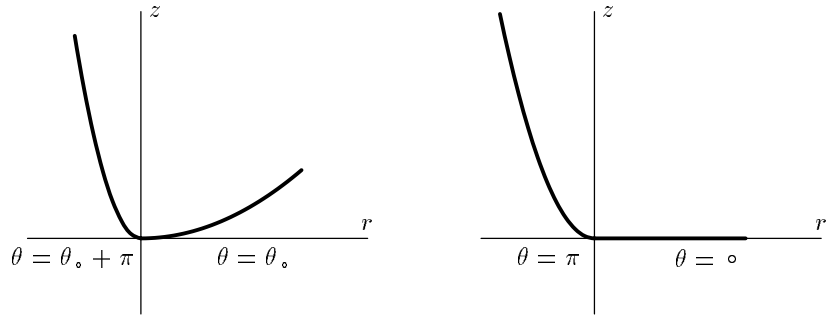
از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، f در a به طور اولی پیوسته است. از حد بالا نتیجه می‌شود که $\lim_{x \to a} |f(x) - A(x)| = ۰$. از آنجا که هر تابع مستوی پیوسته است، داریم $\lim_{x \to a} A(x) = A(a) = f(a)$، پس $\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = ۰$، یعنی حد $f(x)$ وقتی x به a میل کند وجود دارد و برابر $f(a)$ است. در نتیجه f در a پیوسته است.

در پایان جلسهٔ قبل دیدیم که وجود مشتق‌های پاره‌ای دلیل بر مشتق‌پذیری تابع نمی‌شود در واقع وجود همهٔ مشتق‌های سویی در یک نقطه، حتی پیوستگی تابع در آن نقطه را نتیجه نمی‌دهد!

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را نسبت به مختصات قطبی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = \tan \frac{\theta}{۴} r^۲ \qquad ۰ \leq \theta < ۲\pi$$

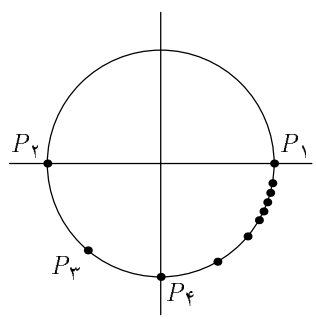
توجه کنید که f روی هر نیم‌خط به طور مشخص تعریف شده است و $f(۰, ۰) = ۰$. روی خط راست $\theta = ۰, \pi$ (محور x) و روی خط راست $\theta = \theta_۰, \theta_۰ + \pi$، $۰ < \theta < \pi$، نمودار f در شکل ۱ (الف) و (ب) نمایش داده شده است.



شکل ۱

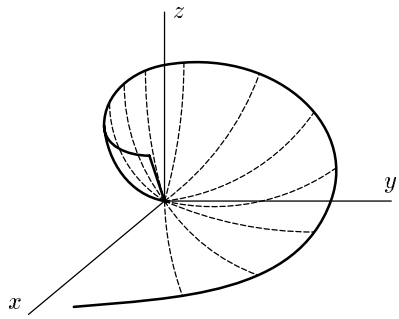
مشتق سویی f در نقطهٔ $(\circ, \circ)$ در همهٔ جهات صفر است، ولی نشان می‌دهیم f در $(\circ, \circ)$ پیوسته نیست. دنبالهٔ نقاط زیر را در نظر بگیرید که از $p_۱ = (۱, \circ)$ شروع شده، در جهت مثلثاتی گردش می‌کند، و به نقطه $(\circ, \circ)$ میل می‌کند (شکل ۲):

$$p_n = (\cos ۲(۱ - \frac{۱}{n})\pi, \sin ۲(۱ - \frac{۱}{n})\pi) \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$



شکل ۲

داریم $f(p_n) = ۱$، پس $f(p_n) \longrightarrow ۲\pi$. این در حالی است که $p_n \longrightarrow (\circ, \circ)$ و $f(\circ, \circ) = \circ$. پس f در $(\circ, \circ)$ پیوسته نیست. نمودار f در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳

مثال‌های این جلسه و جلسه قبل نشان می‌دهندکه تحقیق مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطهٔ قلمرو ممکن است موضوع بسیار ظریفی باشد. در مثال بالا همهٔ خطوط مماس بر نمودار تابع در $(0,0,0)$ افقی هستند یعنی در صفحه xy قرار دارند ولی این صفحه در مبدأ بر نمودار تابع مماس نیست و تابع اصلاً در $(0,0)$ پیوسته نیست! خوشبختانه یک ضابطهٔ کافی برای تحقیق مشتق‌پذیری در یک نقطه وجود دارد که فوق‌العاده کارساز و قابل استفاده است. اثبات گزارهٔ زیر را به بعد موکول می‌کنیم ولی در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد:

(۲۴−۱) گزاره. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$ طوری باشد که تابع‌های $\frac{\partial f}{\partial x_i} : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ همه در یک گوی باز حول نقطهٔ درونی a از S وجود داشته و در نقطهٔ a پیوسته باشند. در این صورت f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. □

بدین ترتیب برای تحقیق مشتق‌پذیری f کافی است پس از اطمینان از این که مشتق‌های پاره‌ای در نزدیکی a وجود دارند، پیوستگی هر یک را در آن نقطه تحقیق کنیم.

مثال. به مثالی که در هر یک از دو جلسهٔ قبل مورد بحث قرار گرفت باز می‌گردیم، یعنی تابع

$f:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۲}y}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

دیدیم که این تابع در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست. ضمناً برای $\frac{\partial f}{\partial y}$ در دو جلسهٔ قبل عبارت زیر را به‌دست آوردیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۴}-x^{۲}y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در مختصات قطبی خارج از $(۰,۰)$ داریم $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos^{۲}\theta(\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta)$ مثلاً روی محور x، $\theta=۰,\pi$، $\frac{\partial f}{\partial x}(x,۰)=۱$ برقرار است. بنابراین $\frac{\partial f}{\partial y}$ در $(۰,۰)$ پیوسته نیست، که با عدم مشتق‌پذیری f در $(۰,۰)$ سازگار است.

اکنون به جنبه‌های کاربردی‌تر تقریب خطی می‌پردازیم. همان طور که دیدیم در بین تابع‌های درجه یک که نمودارشان از یک نقطهٔ خاص نمودار تابع داده شده می‌گذرد، تقریب خطی یگانه تابعی است که تفاضل مقدارش با مقدار متناظر تابع داده شده سریعتر از فاصلهٔ متغیر از نقطهٔ مورد بحث به صفر میل می‌کند. این ویژگی باید روش تقریب مناسبی را پیش پای ما بگذرد زیرا که از یک سو تقریب خوبی مطرح است و از سویی دیگر محاسبهٔ تابع‌های درجه یک بسیار ساده است.

مثال ۱. به کمک روش تقریب خطی، مقداری تقریبی برای $\sqrt[۳]{x^{۲}-y}$ پیدا کنید وقتی $x=۲/۹$ و $y=۱/۱$. ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $a=۳$ و $b=۱$، داریم $\sqrt[۳]{a^{۲}-b}=۲$ و نقطهٔ $(x,y)=(۲/۹,۱/۱)$ را می‌توان برای بعضی مقاصد نزدیک نقطه (a,b) فرض کرد. تابع $f(x,y)=\sqrt[۳]{x^{۲}-y}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق‌های پاره‌ای این تابع نسبت به x و y وجود دارند و پیوسته‌اند وقتی زیر $\sqrt[۳]{}$ صفر شود، یعنی وقتی $y\neq x^{۲}$. نقطه $(۳,۱)$ روی $y=x^{۲}$ نیست، پس در یک

گوی باز حول آن (که شامل $(۲/۹, ۱/۱)$ نیز می‌شود) مشتق‌های پاره‌ای وجود دارند. در واقع

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{۲x}{۳}(x^۲ - y)^{-\frac{۲}{۳}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{۱}{۳}(x^۲ - y)^{-\frac{۲}{۳}}$$

تقریب خطی f را در نقطهٔ $(a,b) = (۳, ۱)$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= ۲ + \frac{\partial f}{\partial x}(۳,۱)(x-۳) + \frac{\partial f}{\partial y}(۳,۱)(y-۱) \\ A(۲/۹, ۱/۱) &= ۲ + \tfrac{۱}{۲}(-۰/۱) + (\tfrac{-۱}{۱۲})(۰/۱) \\ &= ۲ - \tfrac{۱}{۲۰} - \tfrac{۱}{۱۲۰} \end{aligned}$$

پس طبق تقریب خطی:

$$\sqrt[۳]{(۲/۹)^۲ - (۱/۱)} \simeq ۲ - \frac{۱}{۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \simeq ۱/۹۴۱۶۶۷$$

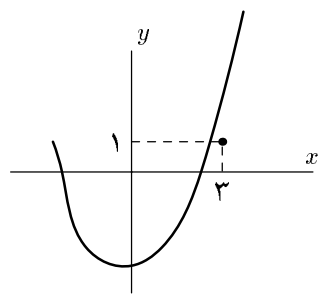
در اینجا روش دیگری برای استفاده از تقریب خطی به نظر می‌رسد. داریم $\sqrt[۳]{(۲/۹)^۲ - (۱/۱)} = \sqrt[۳]{۷/۳۱}$. می‌توان این مسأله را به صورت تقریب خطی یک متغیری مطرح کرد. تابع $f(t) = \sqrt[۳]{t}$ در نظر بگیرید. داریم $f(۸) = ۲$ و می‌خواهیم مقداری تقریبی برای $f(۷/۳۱) = f(۸ - ۰/۶۹)$ پیدا کنیم. طبق تقریب خطی یک متغیری:

$$f(۷/۳۱) \simeq f(۸) - (۰/۶۹)f'(۸)$$

حال $f'(t) = \frac{۱}{۳}t^{-\frac{۲}{۳}}$، پس $f'(۸) = \frac{۱}{۱۲}$ و

$$f(۷/۳۱) \simeq ۲ - \frac{۶۹}{۱۲۰۰} = ۱/۹۴۲۵$$

کدامیک از دو تقریب به واقعیت نزدیکتر است؟ تابع دو متغیری $f(x,y) = \sqrt[۳]{x^۲ - y}$ را در نظر بگیرید. ترکیب‌های مختلفی از x و y منجر به $\sqrt[۳]{۷/۳۱}$ می‌شوند. در واقع با قرار دادن $x^۲ - y = ۷/۳۱$ یک سهمی در صفحه xy به دست می‌آید که جزیی از آن "نزدیک" نقطهٔ $(۳, ۱)$



شکل ۴

است. بخشی از نمودار $f(x,y)=\sqrt[۳]{x^۲-y}$ را که بالای سر این منحنی قرار دارد در نظر بگیرید که یک منحنی روی نمودار می‌شود. نقاط مختلف این منحنی از تقریب خطی در نقطهٔ $(۳,۱)$ فواصل گوناگون دارند، یعنی تقریب خطی در $(۳,۱)$ جوابی یکسان برای همهٔ این نقاط نمی‌دهد، که امری طبیعی است. برای هر چنین (x,y)، دو مقدار $(x-۳)$ و $(y-۱)$ بر تقریب خطی به‌دست آمده اثر دارند. در تقریب خطی یک متغیری، همه این نقاط به صورت یک نقطه روی محور t دیده می‌شوند و تقریبی که به‌دست می‌آید نسبت به پستی بلندی‌های نمودار $f(x,y)=\sqrt[۳]{x^۲-y}$ حساس نیست. جمعبندی بحث بالا این است که اگر مسأله اولیه به طور طبیعی یک مسأله دو متغیری باشد، بهتر است تقریب خطی دو متغیری در نظر گرفته شود که تمایز میان نقاط مختلفی که منجر به یک مسأله یک متغیری می‌شوند نادیده گرفته نشود. بالعکس اگر یک مسأله یک متغیری را به روش‌های گوناگون به مسأله‌ای دو متغیری مبدل کنیم، جواب‌های گوناگونی حاصل خواهند شد که هر یک وابسته به فرض‌های اضافی و بعضاً شاید غیرطبیعی باشد. در مثال ۱ که مسأله به صورت دو متغیری مطرح بود، روش طبیعی، استفاده از تقریب خطی دو متغیری است.

مثال ۲. $S\subset\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S=\{(x_۱,\ldots,x_n)\mid x_i>۰, i=۱,\ldots,n\}$$

و تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

که در آن $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ اعداد حقیقی مثبت داده شده‌اند. این گونه تابع در بعضی مسائل اقتصادی مطرح می‌شود که در آن x_i ها مقادیر عوامل مختلف تولید هستند ولی منحصر به این نوع کاربرد نیستند. سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که اگر عوامل $x_1, \ldots, x_n$ به ترتیب با دقت نسبی $r_1, \ldots, r_n$ درصد معلوم باشند، نتیجه محاسبه، یعنی $f(x_1, \ldots, x_n)$ با چه دقت نسبی تعیین می‌شود؟ اگر $a_1, \ldots, a_n$ "مقادیر واقعی" متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ باشند، خطاهای نسبی به ترتیب $\frac{x_1 - a_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n - a_n}{a_n}$ هستند. $x_i - a_i$ را به Δx_i نیز نمایش می‌دهیم. طبق فرمول تقریب خطی داریم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \Delta x_i \qquad (2)$$

با مشتق‌گیری از (۱) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = c\alpha_i x^{\alpha_1} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i - 1} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha_n} = \frac{\alpha_i}{x_i} f(x)$$

بنابراین با جایگزینی در (۲):

$$\Delta f = f(x) - f(a) \simeq f(x) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$$

در نتیجه خطای نسبی f، یعنی $\frac{\Delta f}{f}$، از تقریب خطی به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

حال اگر خطای نسبی x_i برابر r_i درصد باشد، نتیجه می‌شود که خطای نسبی در محاسبه f حدوداً $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i$ درصد خواهد بود.