مفهوم مشتق

حساب دیفرانسیل و انتگرال نیرومندترین حربه‌ای است که ریاضیات برای برخورد با مسائل غیرخطی پدید آورده است. دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، "مشتق" و "انتگرال" هستند. در اینجا مفهوم مشتق را برای تابع‌های n متغیری بررسی می‌کنیم. در حالت یک متغیری دو انگیزه و نیاز متفاوت منجر به یک نتیجه، یعنی تعریف مشتق تابع یک متغیری می‌شوند ولی خواهیم دید که برای تابع‌های دو یا چند متغیر، این برخوردها منجر به مفاهیم متمایز ولی مرتبط می‌گردند. مقصود ما از دو برخورد، یکی دقیق ساختن مفهوم "آهنگ تغییر لحظه‌ای" و دیگری مفهوم "خط مماس" است.

نخست یک واژهٔ مربوط به مجموعهٔ نقاط را توصیف می‌کنیم. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ است. نقطهٔ a را یک نقطه درونی S می‌نامیم در صورتی که عدد حقیقی اکیداً مثبت r وجود داشته باشد که گوی باز به شعاع r و مرکز a به تمامی در S واقع شود. توجه کنید که نقطهٔ درونی S لزوماً عضو S می‌شود.

مثال ۱. برای مجموعهٔ $[a,b]$ در $\mathbb{R}$، نقاط درونی $[a,b]$، مجموعهٔ $]a,b[$ را تشکیل می‌دهند.

مثال ۲. برای $R>0$، مجموعهٔ $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid 0<|x|\leq R\}$ را در نظر بگیرید. نقاط درونی S، زیرمجموعهٔ $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid 0<|x|<R\}$ را تشکیل می‌دهند.

مجموعهٔ نقاط درونی S را درون S می‌نامیم. در زیر نخست مفهوم مشتق تابع یک متغیری را بررسی می‌کنیم.

(۲۱–۱) آهنگ تغییر. فرض کنید I یک بازه در $\mathbb{R}$ است، $x_\circ \in \mathbb{R}$، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. اگر x_1 نقطهٔ دیگری از I باشد، تغییرمتوسط f وقتی متغیر x از $x_\circ$ تا x_1 تغییر کند را به صورت

$$\frac{f(x_1) - f(x_\circ)}{x_1 - x_\circ} \qquad (1)$$

تعریف می‌کنیم. این عدد نمایشگر این است که به‌ازای واحد x چه تغییر متوسطی در f رخ داده است وقتی متغیر از $x_\circ$ به x_1 تغییر کند. یک تعبیر معمول، تندی متوسط حرکت در امتداد یک مسیر است. در اینجا متغیر تابع، زمان فرض می‌شود، معمولاً به جای x از t استفاده می‌کنیم، و $f(t)$ فاصله روی مسیر حرکت از یک نقطهٔ مبدأ است در جهتی که مثبت قرارداد می‌شود. در این صورت $\frac{f(t_1)-f(t_\circ)}{t_1-t_\circ}$ تندی متوسط حرکت از زمان $t_\circ$ تا t_1 است.

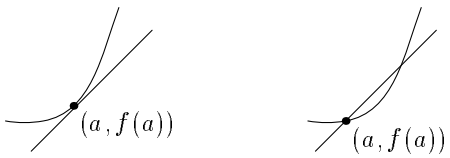
روشن است که هر چه بازهٔ $x_\circ$ تا x_1 (یا بازهٔ زمانی $t_\circ$ تا t_1) کوچکتر فرض شود، تغییر متوسط در آن بازه نمونه بهتری از آهنگ تغییرات تابع در آن بازه است. در نهایت آهنگ تغییر f در نقطهٔ $x_\circ$ برابر حد زیر تعریف می‌شود، در صورتی که این حد وجود داشته باشد:

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x_1 - x_\circ} \qquad (2)$$

این حد را مشتق f در نقطهٔ $x_\circ$ نیز می‌نامیم و معمولاً به $f'(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم. اگر این حد وجود داشته باشد، تابع f را مشتق‌پذیر در $x_\circ$ می‌نامیم. در تعبیر حرکت، $x = t$، حد بالا تندی حرکت در لحظهٔ $t_\circ$ خوانده می‌شود. معمولاً مشتق در یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تعریف مطرح می‌شود ولی تعریف (۲) در هر نقطهٔ دامنه که نقطهٔ حدی باشد قابل مطرح شدن است. مثلاً وقتی $I = [a, b]$، هر دو نقطهٔ انتهایی، a و b، نقاط حدی I هستند، برای $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، $f'(a)$ معمولاً "مشتق از راست تابع f در نقطهٔ a"، و $f'(b)$ "مشتق از چپ تابع f در نقطهٔ b" خوانده می‌شوند.

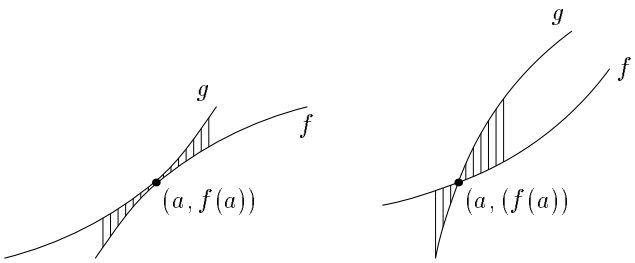
(۲۱–۲) خط مماس. از نظر تاریخی اولین انگیزه‌ای که موجب به وجود آمدن تعریف مشتق شد، کوشش برای یافتن معادلهٔ خط مماس بر یک منحنی در نقاط منحنی بود. فرض کنید مجدداً I یک بازه باشد و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. نمودار این تابع را به عنوان منحنی مورد اشاره در نظر می‌گیریم.

نقطه‌ای $a \in I$ در نظر بگیرید، هدف یافتن معادلهٔ "خط مماس" بر نمودار در نقطهٔ $(a, f(a))$ است. اما "خط مماس" یعنی چه؟ همهٔ ما برداشتی شهودی و بصری در مورد خط مماس داریم. در شکل ۱ (الف) خط رسم شده را "قاطع" تلقی می‌کنیم نه مماس، ولی در شکل ۱ (ب)، خط رسم شده "مماس" تلقی می‌شود. چگونه می‌توان با یک تعریف دقیق ریاضی میان این دو تمیز داد؟ در مورد ساده‌ترین منحنی غیر راست، یعنی دایره، خط مماس را می‌توان خطی تعریف کرد که بر شعاع واصل از مرکز دایره به نقطهٔ مورد بحث عمود باشد، ولی این تعریف فقط در مورد دایره معنی دارد.



شکل ۱

به طور کلی از مقایسهٔ شکل‌های (الف) و (ب) بر می‌آید که وقتی روی منحنی به نقطهٔ $(a, f(a))$ نزدیک می‌شویم، فاصلهٔ بین نقطهٔ روی منحنی و نقطهٔ نظیر روی خط که دارای همان مؤلفهٔ افقی باشد، در مورد خط مماس سریعتر از در مورد خط قاطع به صفر میل می‌کند. همین مشاهده در مورد منحنی‌های مماس در مقایسه با منحنی‌های قاطع نیز صادق است (شکل ۲).



شکل ۲

به کمک مفهوم حد می‌توان ایدهٔ سرعت نزدیک شدن دو نمودار به هم را به طور دقیق صورتبندی کرد و به تعریف دقیقی از "مماس" دست یافت. نخست برای سهولت بیان، مفهوم "مماس بودن" را در یک نقطهٔ درونی دامنه‌های تعریف توابع بررسی می‌کنیم.

(۲۱–۳) تعریف. فرض کنید I و J بازه‌هایی در $\mathbb{R}$ باشند، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع، و a نقطهٔ درونی برای I و J. می‌گوییم f و g به‌ازای $x = a$ بر هم مماس هستند در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشند:

$$f(a) = g(a) \qquad (۳)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = ۰ \qquad (۴)$$

توضیحاتی پیرامون این تعریف لازم است. شرط اول، (۳)، یک الزام واضح است: برای این که نمودار f و نمودار g در یک نقطه بر هم مماس باشند لازم است که هر دو از آن نقطه بگذرند، یعنی $(a, f(a)) = (a, g(a))$. ولی این شرط حتی در مورد نمودارهای قاطع هم برقرار است. آنچه "قاطع" و "مماس" را از هم تمیز می‌دهد، شرط دوم یعنی (۴)، است. توجه کنید که اگر f و g پیوسته باشند، چون $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$، پس اگر داشته باشیم $f(a) = g(a)$، نتیجه می‌شود که $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = ۰$. این حد برای نمودارهای دو تابع پیوسته که قاطع هم باشند معتبر است. ولی شرط (۴) محدودکننده‌تر است. در کسر $\frac{f(x)-g(x)}{x-a}$ مخرج نیز به صفر میل می‌کند وقتی x به a میل کند. بنابراین میل کردن این کسر به صفر نشانگر این است که تفاضل مقدارهای دو تابع، به‌ازای x مشترک (یعنی صورت کسر)، سریعتر از $x - a$ به صفر میل می‌کند که خارج قسمت کماکان به صفر میل می‌کند.

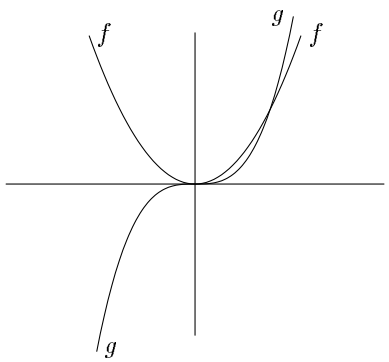
مثال ۱. $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x^۳$ در نظر می‌گیریم. داریم $f(a) = g(a)$ و نشان می‌دهیم f و g به‌ازای $x = ۰$ بر هم مماس‌اند. داریم

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - ۰} = \frac{x^۲ - x^۳}{x}$$

برای محاسبهٔ حد وقتی $x \longrightarrow ۰$، مقدار $x = ۰$ مطرح نیست، پس

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - ۰} = x - x^{۲}$$

و $\lim_{x \to ۰}(x - x^{۲}) = ۰$، پس f و g در $x = ۰$ بر هم مماس‌اند (شکل ۳).



شکل ۳

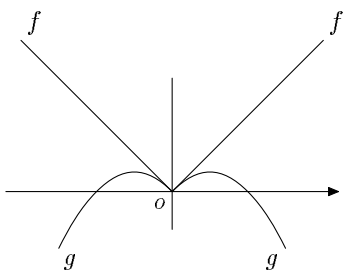
مثال ۲. دو تابع $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = |x| \quad , \quad g(x) = |x| - x^{۲}$$

نمودار f و g در شکل ۴ نمایش داده شده است. داریم $f(۰) = g(۰)$، نشان می‌دهیم f و g در $x = ۰$ بر هم مماس هستند:

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - ۰} = x \qquad x \neq ۰$$

پس حد عبارت فوق صفر است وقتی x به ۰ میل می‌کند و حکم نتیجه می‌شود.



شکل ۴

حال وضعیت خاص مماس شدن یک خط راست را بر نمودار یک تابع دلخواه بررسی می‌کنیم. فرض کنید تابع f روی یک بازهٔ I تعریف شده است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، و a یک نقطهٔ درونی بازهٔ a است. خطوط راست غیر قائم در صفحه نمودار تابع‌های مستوی $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هستند:

$$A(x) = mx + b$$

نشان می‌دهیم: حداکثر یک تابع مستوی وجود دارد که به‌ازای $x = a$ بر f مماس است و شرط لازم و کافی برای وجود چنین تابع مستوی این است که f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد که در این صورت $m = f'(a)$. طبق شرط (۳) باید داشته باشیم $f(a) = ma + b$، پس $b = f(a) - ma$ و $A(x) = f(a) + m(x - a)$. حال شرط (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + m(x - a)]}{x - a} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m\} = 0$$

برای $m \in \mathbb{R}$ داده شده، شرط لازم و کافی برای برقراری شرط بالا این است که $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وجود داشته باشد و برابر m باشد. بدین ترتیب f باید در $x = a$ مشتق‌پذیر بوده و ضریب زاویهٔ خط گذرا از $(a, f(a))$ باید برابر مشتق f در a باشد.

نکتهٔ بالا ارتباط بین دو رهیافت به مشتق را مشخص می‌کند. اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، نمودار تابع مستوی $A(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ را خط راست مماس بر نمودار f در $(a, f(a))$ می‌نامیم. تابع مستوی A، تقریب خطی f در $x = a$ نیز نامیده می‌شود. به مفهومی که در بالا آمد این تابع درجه ۱، "بهترین تقریب درجه ۱" به تابع f است. در بین تابع‌های درجه ۱ که نمودارشان از $(a, f(a))$ می‌گذرد، فقط برای این تابع است که تفاضل مقدار f و مقدار این تابع سریعتر از $(x - a)$ به ۰ میل می‌کند وقتی x به a میل کند.

تعبیر هندسی معمول دیگری برای خط مماس، معادل با این تعریف، به صورت زیر است. خط راستی را در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ ثابت $(a, f(a))$ و نقطهٔ دیگری $(x, f(x))$ بگذرد. ضریب زاویهٔ

این خط برابر است با $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. وقتی x به a میل کند. وضعیت خط قاطع به سوی "خط مماس"، در صورت وجود، میل می‌کند. حد کسر بالا وقتی $x \to a$ برابر $f'(a)$ است در صورتی که این حد وجود داشته باشد. اگر مقدار تابع f را به y نمایش دهیم، $y = f(x)$، معمول است که تغییر f، یعنی $f(x) - f(a)$، به Δy، و تغییر x، یعنی $x - a$، به Δx نمایش داده می‌شود. در این صورت مقدار مشتق برابر حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ است وقتی $\Delta x \longrightarrow ۰$.

فرض کنید تابع f در a مشتق‌پذیر باشد. دیفرانسیل f در a تابع خطی $df_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ است که با ضریب زاویهٔ $f'(a)$ مشخص می‌شود، یعنی:

$$df_a(x) = f'(a)x \qquad (۵)$$

بدین ترتیب اگر خط مماس بر نمودار در نقطهٔ $(a, f(a))$، یعنی $A(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$، را طوری منتقل کنیم که $(a, f(a))$ به $(۰, ۰)$ منتقل شود، نمودار دیفرانسیل ظاهر می‌شود. بیان دیگری که قابل تعمیم به ابعاد بالاست، به صورت زیر است. تابع df_a در (۵) یک تابع خطی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است. نمایش ماتریسی این تابع، ماتریس ۱×۱ با تک درآیهٔ $[f'(a)]$ است. بدین ترتیب می‌توان df را تابعی دانست که به هر a در دامنهٔ f، عدد $f'(a)$، یا ماتریس ۱×۱، $[f'(a)]$، را نسبت می‌دهد.