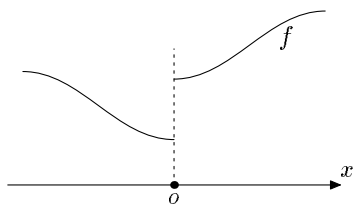
پایداری محاسبه و پیوستگی

یکی از ملاحظاتی که در همه محاسبات علمی و مهندسی ظاهر می‌شود مسأله تقریب است. حتی در محاسبات روزمره نیز عموماً با تقریب به عنوان یک وضعیت همه‌گیر خو گرفته‌ایم. وقتی برای یک محاسبهٔ با ارقام ریز اعشاری از ماشین حساب استفاده می‌کنیم وجود تقریب قابل تحمل را عملاً می‌پذیریم. معمولاً فرض می‌کنیم که اگر داده‌های ما به اندازه کافی به "مقدار واقعی" نزدیک باشند، خروجی مسأله نیز تقریب مناسبی از نتیجه ایده‌آل است. هدف ما در این جلسه صورتبندی دقیق این مفهوم است. البته می‌توان به سادگی پدیده‌هایی واقعی یا ساختگی تجسم کرد که از این انتظار تبعیت نکنند. به عنوان مثال تابع شکل ۱ را در نظر بگیرید که نمودار آن به ازای $x = a$ دستخوش یک جهش است. در اینجا فرض می‌کنیم که قرار است مقدار x که نزدیک a است با یک آزمایش اندازه‌گیری شده و با جایگزینی آن در فرمول $y = f(x)$، مقدار y محاسبه شود. حال قطعاً آزمایش متضمن مقداری خطاست و بسته به این که مقدار به‌دست آمده برای x کمی بالاتر یا کمی پایین‌تر از "مقدار واقعی" ایده‌آل، یعنی a، باشد، نتیجهٔ محاسبه y از فرمول $f(x)$ می‌تواند بسیار متفاوت باشد. در اینجا مقدار



شکل ۱

نسبت داده شده به تابع در نقطهٔ a، یعنی $f(a)$،در عمل مطرح نیست زیرا که آزمایش هیچگاه دقت ایده‌آل ندارد.

اکنون مسأله را کمی دقیقتر صورتبندی می‌کنیم. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. نقاط S را به $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و مقدار $f(x)$ را به y نمایش می‌دهیم. در یک مسأله تجربی می‌توان $x_1, \ldots, x_n$ را عواملی دانست که با آزمایش اندازه‌گیری می‌شوند و $f(x_1, \ldots, x_n)$ یک عبارت یا فرمول است که از آن مقدار y محاسبه می‌شود. نقطه‌ای $a = (a_1, \ldots, a_n)$ در دامنهٔ f در نظر بگیرید، یعنی $a \in S$. برای محاسبهٔ مقدار $f(a)$، خطایی $e > 0$ را به عنوان "خطای قابل تحمل" منظور می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان حدود خطایی $e'_1 > 0$، ...، $e'_n > 0$ برای به ترتیب x_1، ...، x_n پیدا کرد به طوری که اگر برای x در دامنهٔ f، $|x_1 - a_1| < e'_1$، ...، $|x_n - a_n| < e'_n$، آنگاه خطای حاصل در محاسبه، یعنی $|f(x) - f(a)|$ کوچکتر از e باشد؟ اگر بتوان برای هر $e > 0$، مقادیر متناظری $e'_1 > 0$، ...، $e'_n > 0$ با ویژگی بالا پیدا کرد، می‌گوییم "محاسبهٔ f در a پایدار است". اصطلاح معمول‌تر این است که تابع f را در نقطهٔ a پیوسته می‌نامیم.

مثال ۱. (تابع‌های مستوی) تابع مستوی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

که در آن $c_0, c_1, \ldots, c_n$ اعداد حقیقی داده شده‌اند. نشان می‌دهیم f در همه نقاط $\mathbb{R}^n$ پیوسته است. نقطه‌ای $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید و خطای دلخواهی $e > 0$ منظور کنید. می‌خواهیم $e'_1 > 0$، ...، $e'_n > 0$ را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

معمولاً یافتن $e'_1, \ldots, e'_n$ به این طریق حاصل می‌شود که سعی می‌کنیم عبارت $|f(x) - f(a)|$، یا کمیتی بزرگتر از آن را، طوری بازنویسی کنیم که اثر هر یک از عوامل $|x_1 - a_1|$، ...، $|x_n - a_n|$ در

آن ظاهر شود. در اینجا:

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &= |(c_1x_1+\cdots+c_nx_n)-(c_1a_1+\cdots+c_na_n)| \\ &= |c_1(x_1-a_1)+\cdots+c_n(x_n-a_n)| \\ &\leq |c_1||x_1-a_1|+\cdots+|c_n||x_n-a_n| \end{aligned}$$

حال اگر بتوانیم هر $|c_j||x_j-a_j|$ را کوچکتر از $\frac{e}{n}$ کنیم، نتیجه مطلوب در مورد خطای $f(x)$ به‌دست می‌آید. چون c_j داده شده و معلوم است اگر e'_j برابر (یا کوچکتر از) $\frac{e}{|c_j|n}$ اختیار شود مقصود حاصل می‌شود. تنها مشکل احتمالی این است که ممکن است c_j صفر باشد. برای احتراز از این مشکل $e_j > 0$ را کوچکتر یا مساوی $\frac{e}{(|c_j|+1)n}$ می‌گیریم. در این صورت:

$$\begin{aligned} (|x_1-a_1|<e'_1,\ldots,|x_n-a_n|<e'_n) \Longrightarrow |f(x)-f(a)| &\leq |c_1||x_1-a_1|+\cdots+|c_n||x_n-a_n| \\ &< |c_1|\tfrac{e}{(|c_1|+1)n}+\cdots+|c_n|\tfrac{e}{(|c_n|+1)n} \\ &< \tfrac{e}{n}+\cdots+\tfrac{e}{n}=e \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

توجه کنید که تابع‌های مستوی شامل مثال‌های مهم زیر می‌شوند:

الف) تابع‌های ثابت. در اینجا $c_1=\cdots=c_n=0$.

ب) تابع‌های افکنش. مقصود از "تابع افکنش روی مؤلفه j ام" تابع $\pi_j:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $\pi_j(x_1,\ldots,x_n)=x_j$ تعریف می‌شود. در اینجا $c_j=1$ و سایر c_j ها صفر هستند.

ج) تابع جمع. تابع $s:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود تابع جمع می‌نامیم:

$$s(x_1,\ldots,x_n)=x_1+\cdots+x_n$$

در اینجا $c_0=0$ و $c_1=\cdots=c_n=1$.

مثال ۲. (تابع ضرب) $p:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(x,y)=x\cdot y$$

ادعا می‌کنیم p در هر نقطهٔ (a,b) از $\mathbb{R}^2$ پیوسته است. برای خطای داده شدهٔ $e > 0$، باید $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x-a| < e'_1, |y-b| < e'_2) \Longrightarrow |xy - ab| < e$$

در اینجا نیز $|xy-ab|$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |xy-ab| &= |xy - xb + xb - ab| \\ &\leq |x||y-b| + |b||x-a| \end{aligned}$$

مجدداً می‌خواهیم با کوچکتر کردن هر یک از دو عامل جمع در سمت راست از $\frac{e}{2}$، به نتیجه مطلوب برسیم. تنها نکتهٔ جدید در اینجا این است که ضریب $|x|$ در عبارت اول خود متغیر است. برای رفع این مشکل، چون قرار است x به a نزدیک باشد، مقدماتاً x را به بازهٔ $]a-1, a+1[$ محدود می‌کنیم، پس با این قید:

$$|x| < |a| + 1$$

و در نتیجه

$$|xy-ab| \leq (|a|+1)|y-b| + |b||x-a|$$

حال با گرفتن $0 < e'_1 \leq \min\{1, \frac{e}{2(|b|+1)}\}$ و $0 < e'_2 \leq \frac{e}{2(|a|+1)}$، هم قید مقدماتی تأمین می‌شود و هم نامساوی مورد نظر در مورد $|xy-ab|$ به‌دست می‌آید.

مثال ۳. (تابع خارج قسمت) U را مجموعهٔ زیر از $\mathbb{R}^2$ می‌گیریم:

$$U = \{(x,y) \mid y \neq 0\}$$

یعنی U مکمل محور x در صفحهٔ xy است. تابع $q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q(x,y) = \frac{x}{y}$$

ثابت می‌کنیم q در هر نقطه دامنهٔ خود، (a,b)، $b \neq 0$، پیوسته است. برای $e > 0$ داده شده، $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ جستجو می‌کنیم که

$$((x,y) \in U, |x-a| < e'_1, |y-b| < e'_2) \Longrightarrow |\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| < e$$

داریم

$$\begin{aligned} |\tfrac{x}{y} - \tfrac{a}{b}| &= \tfrac{|bx-ay|}{|y||b|} \\ &= \tfrac{|bx-ba+ba-ay|}{|y||b|} \\ &\leq \tfrac{|x-a|}{|y|} + \tfrac{|a||y-b|}{|y||b|} \end{aligned}$$

می‌خواهیم با انتخاب مناسب $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ هر یک از دو عامل طرف راست را از $\frac{e}{2}$ کوچکتر کنیم. با این که $y \neq 0$، از آنجا که فعلاً محدودیتی برای $y \neq 0$ قائل نشده‌ایم، مخرج هر یک از دو عبارت می‌تواند به دلخواه کوچک شود و از این رو در نگاه اول محدود کردن اندازهٔ کسرها مشکل به نظر می‌رسد. ولی توجه کنید که $b \neq 0$ مقداری داده شده است و قرار است y نهایتاً نزدیک b اختیار شود. مقدمتاً y را از نصف فاصلهٔ b به 0 بزرگتر می‌گیریم، یعنی $|y-b| < \frac{b}{2}$، یا $|y| > \frac{|b|}{2}$. این موجب می‌شود که $\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|b|}$، پس با این قید داریم:

$$|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| \leq \frac{2}{|b|}|x-a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y-b|$$

حال ضرایب $|x-a|$ و $|y-b|$ مقادیر ثابتی هستند. $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ را به طریق زیر اختیار می‌کنیم:

$$0 < e'_1 \leq \frac{|b|}{4}e \quad , \quad 0 < e'_2 \leq \min\{\frac{|b|^2}{4(|a|+1)}e, \frac{|b|}{2}\}$$

به این ترتیب اگر $|x-a| < e'_1$ و $|y-b| < e'_2$، هم قید مقدماتی رعایت می‌شود و هم $|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| < e$ حاصل می‌گردد.

تا اینجا فقط تابع‌هایی را در نظر گرفته‌ایم که برد آنها $\mathbb{R}$ است. حال تابعی $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نظر بگیرید که در آن $S \subset \mathbb{R}^n$. داریم $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ که در اینجا هر یک از f_i ها تابعی از S به $\mathbb{R}$ است. از آنجا که محاسبهٔ تابع f به منزلهٔ محاسبهٔ m تابع $f_1, \ldots, f_m$ است، طبیعی است که

پیوستگی f در نقطهٔ a را به صورت زیر تعریف کنیم: f را در نقطهٔ $a \in S$ پیوسته می‌نامیم در صورتی که هر یک از f_i ها در نقطهٔ a پیوسته باشد. بدین ترتیب پیوستگی یک تابع با مقدار در $\mathbb{R}^m$ نکتهٔ تازه‌ای ندارد، بلکه باید پیوستگی m تابع مؤلفه را بررسی کرد. با این حال می‌توان صورت معادلی از این تعریف ارائه کرد که شباهت ظاهری بیشتری به تعریف پیوستگی تابع‌های $S \longrightarrow \mathbb{R}$ دارد و تعبیر هندسی بعضاً سودمندی می‌پذیرد. برای این کار نخست نامساوی‌های ساده و اساسی زیر را مطرح می‌کنیم.

(۱۹–۱) فرض کنید $z = (z_1, \ldots, z_p)$ و $w = (w_1, \ldots, w_p)$ که در آن z_i ها و w_i ها اعداد حقیقی هستند. در این صورت

$$|z_i - w_i| \leq |z - w| \quad \text{برای هر} j = 1, \ldots, p \qquad (1)$$

$$|z - w| \leq \sqrt{p} \max\{|z_1 - p_1|, \ldots, |z_p - w_p| \qquad (2)$$

توجه کنید که $|z - w|$ طول (نرم) p تایی $z - w$ است و هر $|z_i - w_i|$ قدرمطلق عدد $z_i - w_i$ می‌باشد. نامساوی (۱) از تعریف $|z - w|^2 = \sum_{i=1}^{p} |z_j - w_j|^2$ نتیجه می‌شود. برای (۲) نیز از همین تعریف داریم:

$$|z - w|^2 \leq p \max\{|z_1 - w_1|^2, \ldots, |z_p - w_p|^2\}$$

که با جذرگیری نتیجهٔ مورد نظر را می‌دهد.

نامساوی (۱) نتیجه می‌دهد که اگر دو p تایی z و w در $\mathbb{R}^p$ نزدیکتر از e باشند، تفاضل مؤلفه‌های متناظر آنها نیز کوچکتر از e است. بالعکس از (۲) می‌بینیم که هرگاه قدرمطلق تفاضل همهٔ مؤلفه‌های متناظر z و w کوچکتر از e باشند، آنگاه فاصلهٔ z از w کوچکتر از $\sqrt{p}e$ است. با توجه به این که در $\mathbb{R}^p$، p یک عدد ثابت است، این دو نامساوی نشان می‌دهند که برای نزدیک کردن z و w لازم و کافی است که همهٔ مؤلفه‌های متناظر z و w به هم نزدیک شوند. با این مقدمه، تعریف پیوستگی تابع‌های $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

۱۹–۲) گزاره. S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، $a \in S$، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع. در این صورت شرطی لازم و کافی برای پیوستگی f در a این است که برای هر $e > 0$، وجود داشته باشد $e' > 0$ که

$$(x \in S, |x - a| < e') \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

اثبات. نخست فرض می‌کنیم هر f_i در نقطهٔ a پیوسته است و $e > 0$ داده شده است. بنابر فرض پیوستگی، $e'_{i1} > 0$، ...، $e'_{in} > 0$ وجود دارند که:

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_{i1}, \ldots, |x_n - a_n| < e'_{in}) \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{e}{\sqrt{m}}$$

بنابراین تحت این شرایط از (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$|f(x) - f(a)| < e$$

از سویی دیگر اگر قرار دهیم $e' = \min\{e'_{ij} \mid i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$، هرگاه $|x - a| < e'$، می‌توان طبق (۱) نتیجه گرفت که $|x_j - a_j| < e'$ برای هر j، و در نتیجه $|x_j - a_j| < e'_{ij}$، بنابراین:

$$(x \in S, |x - a| < e') \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

بالعکس فرض کنید شرط بالا را بتوان به‌ازای هر $e > 0$ تأمین کرد، نشان می‌دهیم هر f_i در نقطهٔ a پیوسته است. فرض کنید $e > 0$ داده شده باشد، می‌خواهیم $e'_1 > 0, \ldots, e'_n > 0$ را طوری اختیار کنیم که:

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < e$$

طبق فرض، $e' > 0$ وجود دارد که $|x - a| < e'$ و $x \in S$ نتیجه می‌دهند $|f(x) - f(a)| < e$، و در نتیجه طبق (۱)، $|f_i(x) - f_i(a)| < e$ برای هر i. حال تعریف می‌کنیم:

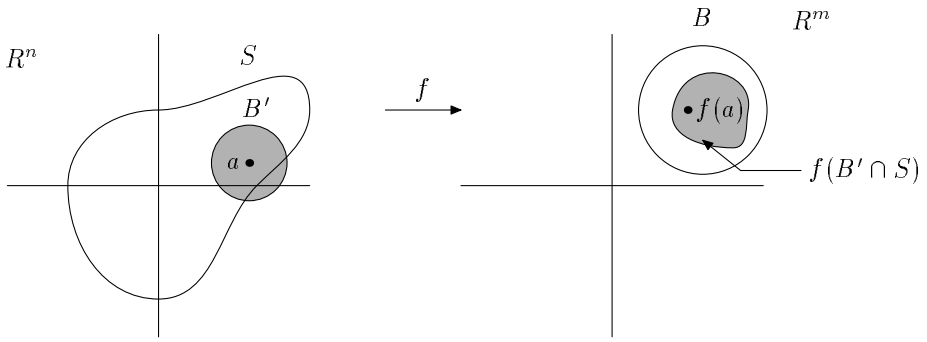
$$e'_1 = \cdots = e'_n = \frac{e'}{\sqrt{n}}$$

بنابراین طبق (۲):

$$\begin{aligned}(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) &\implies (x \in S, |x - a| < e') \\ &\implies |f(x) - f(a)| < e \\ &\implies |f_i(x) - f_i(a)| < e\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

حکم گزارهٔ ۱۹—۲ را می‌توان به صورت هندسی زیر تجسم کرد. مجموعهٔ y های $\mathbb{R}^m$ که در $|y - f(a)| < e$ صدق می‌کنند دقیقاً نقاط گوی باز شعاع e حول $f(a)$ هستند. همین طور مجموعهٔ نقاط $x \in S$ که در $|x - a| < e'$ صدق می‌کنند، دقیقاً آن نقاط گوی باز شعاع e' حول a هستند که در مجموعهٔ S قرار دارند. بنابراین پیوستگی در نقطهٔ a بدین معنی است که به‌ازای هر گوی باز B به شعاع مثبت حول $f(a)$، گوی بازی B' به شعاع مثبت حول a وجود دارد که $f(B' \cap S) \subset B$ (شکل ۲). اگر به تعریف اولیهٔ مؤلفه‌ای پیوستگی در نقطهٔ a بازگردیم، برای هر f_i و هر e_i، باید $e'_{i1} > 0, \ldots, e'_{in} > 0$



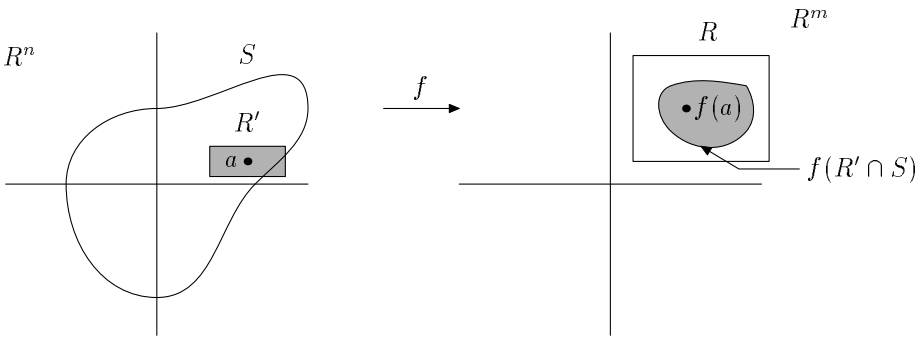
شکل ۲

وجود داشته باشند که $|f_i(x) - f_i(a)| < e_i$ نتیجه دهد $|x_j - a_j| < e'_{ij}$، $j = 1, \ldots, n$ و $x \in S$. قرار می‌دهیم $e'_j = \min\{e'_{1j}, \ldots, e'_{nj}\}$، پس

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \implies |f_i(x) - f_i(a)| < e_i, i = 1, \ldots, m)$$

تجسم هندسی این مطلب این است که برای هر مستطیل باز R به مرکز $f(a)$، مستطیل بازی R' به مرکز a وجود دارد که $f(R' \cap S) \subset R$ (شکل ۳). استدلال بالا و استدلال گزارهٔ ۱۹—۲ را می‌توان در

این نکته خلاصه کرد که درون هر گوی باز به مرکز یک نقطهٔ p، مستطیل بازی به همان مرکز وجود دارد، و بالعکس درون هر مستطیل باز به مرکز p، یک گوی باز به مرکز p وجود دارد.



شکل ۳