

مجموعه‌های تراز

به دنبال معرفی کلی مجموعه‌های تراز در پایان جلسه گذشته، در این جلسه مثال‌هایی مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت مستوی باشد. A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A(x) = L(x) + B \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ برای هر} \quad (1)$$

که در آن L یک نگاشت خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m است و B یک عنصر ثابت \mathbb{R}^m . مجموعه‌های تراز A و L یکی هستند، در واقع

$$A^{-1}(c + B) = L^{-1}(c)$$

یعنی مجموعه تراز منسوب به c برای L همان مجموعه تراز منسوب به $c + B$ برای A است. برای تابع خطی L می‌دانیم که مجموعه‌های تراز یا تهی هستند و یا زیرفضاهای خطی موازی و همبند هستند L می‌باشند.

مثال ۲. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های تراز f را برای مقادیر مختلف $c \in \mathbb{R}$ بررسی می‌کنیم. برای $c < 0$ ، مجموعه تراز منسوب تهی است؛ برای $c = 0$ ، تک نقطه‌ای $\{(0, 0, 0)\}$ حاصل می‌شود؛ و برای $c > 0$ ، کره شعاع \sqrt{c} ، یعنی مجموعه نقاط (x, y, z) بقیه به شرط $x^2 + y^2 + z^2 = c$ به دست می‌آید.

مثال ۳. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که به صورت $f(x, y) = x^2 - y^2$ تعریف شده است. نمودار این تابع را در مثال ۴ جلسه قبل بررسی کردیم، اکنون به بررسی مجموعه‌های تراز می‌پردازیم. برای $c = 0$ ، مجموعه

$$\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y) \mid x - y = 0 \text{ یا } x + y = 0\}$$

از دو خط راست $x + y = 0$ و $x - y = 0$ تشکیل شده است. برای $c > 0$ ، هذلولوی دو شاخه $x^2 - y^2 = c$ به دست می‌آید که رئوس شاخه‌ها در نقاط $(\pm\sqrt{c}, 0)$ قرار دارند و شاخه‌ها به طرف راست و چپ باز می‌شوند. برای $c < 0$ ، نقش x و y تعویض می‌شود. این بار دو رأس هذلولوی در $(0, \pm\sqrt{c})$ قرار دارند و هذلولوی به طرف بالا و پایین باز می‌شود (شکل ۱).

ارتباط این شکل با نمودار $z = x^2 - y^2$ به طریق زیر حاصل می‌شود. به ازای $z = c$ با تقاطع صفحه $z = c$ با نمودار متشکل از نقاط به شکل (x, y, c) است. اگر این مقطع را بر صفحه xy تصویر کنیم دقیقاً مجموعه تراز منسوب به c حاصل می‌شود.

مطلب فوق برای هر تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ معتبر است. اگر نمودار تابع را با صفحه $z = c$ قطع کنیم دقیقاً آن بخش نمودار به دست می‌آید که بالا سر مجموعه تراز منسوب به c قرار دارد. بدین ترتیب اگر نمودار تابع در دست باشد با قطع کردن آن به وسیله صفحات $z = c$ و تصویر کردن روی صفحه xy ، مجموعه‌های تراز f حاصل می‌شوند. بالعکس چنانچه مجموعه‌های تراز رسم شده باشند، با انتقال هر مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ به ارتفاع $z = c$ ، نمودار تابع بازسازی می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد که $a \neq 0$. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \cdot x \quad (2)$$

چون $a \cdot x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ ، این در واقع یک تابع خطی است و در مثال ۱ می‌گنجد ولی بررسی مستقیم آن نیز قابل توجه است. می‌دانیم که مجموعه x هایی که در $a \cdot x = c$ صدق می‌کنند یک ابرصفحه در \mathbb{R}^n است و این ابرصفحه‌ها همه موازی $a \cdot x = 0$ (هسته f) مجموعه x هایی که $x \perp a$ می‌باشند.

مثال ۵. عضوی ثابت $a \neq 0$ در \mathbb{R}^3 در نظر می‌گیریم و $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \times x \quad (3)$$

که مقصود از $a \times x$ ضرب برداری a و x است. تابع (۳) نیز خطی است (هر مؤلفه عبارت درجه ۱ همگن نسبت به x_1, x_2, x_3 است) و در چارچوب مثال ۱ قرار می‌گیرد. این مثال را نیز مستقیماً بررسی می‌کنیم. از آنجا که $a \times x$ بر a عمود است، اگر $c \in \mathbb{R}^3$ در صفحه گذرا از 0 و عمود بر a قرار نداشته باشد، مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ تهی است. برای $c = 0$ ، مجموعه x هایی که در $a \times x = 0$ صدق می‌کنند مضارب بردار a هستند، یعنی نقاط روی خطی که از امتداد a پدید می‌آید. این در واقع هسته تابع خطی f است. پس سایر مجموعه‌های تراز ناتهی خطوط راست موازی a می‌باشند. در واقع اشتراک $f^{-1}(c)$ با صفحه عمود بر a باید یگانه بردار b در این صفحه باشد که (a, b, c) یک سه‌تایی راستگرد است و مساحت مستطیل تعیین شده توسط a و b برابر طول c می‌باشد.

مثال ۶. تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت

$$f(x, y, z) = (z, x^2 + y^2 + z^2)$$

تعریف می‌کنیم. به ازای $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ ، مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ عبارت است از:

$$\{(x, y, z) \mid z = c_1\} \cap \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c_2\}$$

برای $c_2 < 0$ ، مجموعه سمت راست و در نتیجه $f^{-1}(c)$ تهی است. برای $c_2 = 0$ ، مجموعه سمت راست از تک نقطه‌ای $\{(0, 0, 0)\}$ تشکیل شده است، پس $f^{-1}(c_1, 0)$ تهی است مگر وقتی که $c_1 = 0$ و $f^{-1}(0, 0)$ نیز تک نقطه‌ای $\{(0, 0, 0)\}$ است. حال فرض کنید $c_2 > 0$. مجموعه سمت راست، یعنی $f_2^{-1}(c_2)$ کره شعاع $\sqrt{c_2}$ به مرکز z است. برای این که مجموعه سمت چپ، یعنی $f_1^{-1}(c_1)$ با $f_2^{-1}(c_2)$ اشتراک ناتهی داشته باشد، شرط لازم و کافی این است که $-\sqrt{c_2} \leq c_1 \leq \sqrt{c_2}$. وقتی $c_1 = \pm\sqrt{c_2}$ ، صفحه $z = \pm\sqrt{c_2}$ بر کره مماس می‌شود و یک تک نقطه‌ای به عنوان مجموعه تراز حاصل می‌شود $((0, 0, \pm\sqrt{c_2}))$ بسته به این که صفحه $z = \sqrt{c_2}$ یا صفحه $z = -\sqrt{c_2}$ در نظر گرفته شود. برای $-\sqrt{c_2} < c_1 < \sqrt{c_2}$ ، $f^{-1}(c_1, c_2)$ دایره تقاطع کره با صفحه $z = c_1$ است. بدین ترتیب مجموعه‌های تراز ناتهی تابع f عبارتند از تک نقطه‌ای‌های روی محور z و دایره‌های به مرکز روی محور z که در صفحات افقی $z = c$ قرار دارند.

در اینجا مسأله زیر را مطرح می‌کنیم. در مورد تابع‌های مستوی دیدیم که مجموعه‌های تراز شکل‌های ساده و یکنواختی دارند. به عنوان گام بعدی، آیا می‌توان حکمی کلی در مورد مجموعه‌های تراز یک تابع درجه ۲ عنوان کرد؟ تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (4)$$

که در اینجا a_i ها و a_{ij} ها اعداد حقیقی داده شده‌اند. طرف راست (۴) کلی‌ترین عبارت درجه دوم برحسب x_1, \dots, x_n است. سؤال این است که مجموعه‌های تراز تابعی به شکل f در (۴) چگونه اشکالی هستند. در آینده خواهیم دید که با "دوران" مناسب در فضای \mathbb{R}^n می‌توان فقط صورت‌هایی از (۴) را در نظر گرفت

که در آن جملات مخلوط درجه دوم، یعنی $x_i x_j$ با $i \neq j$ ، وجود نداشته باشند، یعنی کافی است تابع‌های درجه دوم به شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 \quad (5)$$

در این جلسه و جلسه بعد دو حالت $n = 2$ و $n = 3$ را توصیف می‌کنیم.

در حالت $n = 2$ اگر به جای x_1 و x_2 نمادهای معمولتر x و y را به کار گیریم، داریم

$$f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 \quad (6)$$

مجموعه‌های تراز چنین تابعی به مقاطع مخروطی معروفند به این دلیل که از نظر هندسی این منحنی‌ها را می‌توان به صورت مقطع یک صفحه و یک مخروط به دست آورد (شکل ۴). در واقع مقاطع مخروطی از دوران باستان شناخته شده بودند و کتاب مخروطات آپولونیوس که بیش از ۲۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده رساله جامعی در بررسی این اشکال است. سه شکل "سه‌می"، "بیضی" و "هذلولی" که در شکل نمایش داده شده‌اند، سه نوع عمده مقاطع مخروطی هستند.

حال برای f در (۶) می‌خواهیم مجموعه (x, y) هایی را که در $f(x, y) = 0$ صدق می‌کنند بررسی کنیم. نتایج به دست آمده همه اشکال ممکن $f(x, y) = c$ را در بر می‌گیرند زیرا با جذب c در ضریب ثابت a_0 ، می‌توان طرف راست را برابر صفر قرار داد. چند حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $a_{11} = a_{22} = 0$. در این حالت در وضعیت تابع‌های مستوی قرار می‌گیریم که قبلاً بررسی شده‌اند.

ب) یکی از a_{11} و a_{22} صفر و دیگری ناصفر. مثلاً فرض کنید $a_{11} \neq 0$ و $a_{22} = 0$. در این صورت با تکمیل مجذور، f به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x, y) = A_0 + a_{11}(x - h)^2 + a_2y \quad (7)$$

اگر $a_2 \neq 0$ ، با قرار دادن $f(x, y) = 0$ و تقسیم بر a_2 ، عبارتی به شکل:

$$y = A(x - h)^2 + B, \quad A = \frac{a_{11}}{a_2} \neq 0$$

به دست می‌آید. که سه‌می نام دارد. بسته به این که $A > 0$ یا $A < 0$ یکی از دو منحنی نمایش داده شده در شکل ۵ حاصل می‌شود.

به عنوان مقطع مخروطی، سهمی از تقاطع یک صفحه موازی یکی از خطوط مولد مخروط به دست می‌آید. اگر در (۷) داشته باشیم $a_2 = 0$ ، آنگاه $f(x, y) = 0$ بسته به علامت A_0 و a_{11} ، دو خط راست قائم، یک خط راست یا تهی است.

حال فرض کنید a_{11} و a_{22} هر دو ناصفر باشند. در این صورت با تکمیل مجذورها در (۶) به عبارت زیر می‌رسیم:

$$f(x, y) = a_{11}(x - h)^2 + a_{22}(y - k)^2 + A_0. \quad (۸)$$

در اینجا دو حالت در نظر می‌گیریم:

ج) a_{11} و a_{22} همعلامت باشند. در این صورت اگر A_0 نیز همعلامت با a_{11} و a_{22} باشد، $f(x, y)$ همواره مثبت یا همواره منفی است، یعنی در $f(x, y) = 0$ هیچ نقطه‌ای صدق نمی‌کند. اگر $A_0 = 0$ ، آنگاه تنها نقطه (h, k) در $f(x, y) = 0$ صدق می‌کند. بالاخره اگر علامت A_0 از علامت a_{11} و a_{22} متفاوت باشد، در $f(x, y) = 0$ ، A_0 را به طرف دیگر معادله برده بر $-A_0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(x - h)^2}{-A_0/a_{11}} + \frac{(y - k)^2}{-A_0/a_{22}} = 1$$

از آنجا که علامت A_0 با علامت a_{11} و a_{22} متفاوت بود، هر یک از دو مخرج بالا مثبت است و می‌توان هر یک را به صورت یک مجذور نوشت، پس داریم:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (۹)$$

این معادله یک بیضی به مرکز نقطه (h, k) است (شکل ۶).

د) a_{11} و a_{22} مختلف‌العلامه باشند. در این صورت نیز اگر $A_0 \neq 0$ ، با محاسبه‌ای عیناً مانند فوق به یکی از دو عبارت زیر می‌رسیم (بسته به این که A_0 با کدامیک از a_{11} و a_{22} همعلامت باشد):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (۱۰)$$

یا

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

هر یک از این دو منحنی یک هذلولی نام دارد. هر هذلولی از دو شاخه قرینه تشکیل شده است (شکل ۹)

بالاخره در این حالت اگر $A_0 = 0$ ، آنگاه $f(x, y) = 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a^2(x-h)^2 - b^2(y-k)^2 = 0 \quad (12)$$

که در آن $a^2 = |a_{11}|$ و $b^2 = |a_{22}|$. این نمایش جبری دو خط راست متقاطع با ضریب زاویه‌های $\pm \frac{a}{b}$ است که از نقطه (h, k) می‌گذرند. ضمناً هر یک از شاخه‌های هذلولی‌های (۱۰) و (۱۱) بر دو خط راست (۱۲) مجانبند.