مجموعه‌های تراز

به دنبال معرفی کلی مجموعه‌های تراز در پایان جلسهٔ گذشته، در این جلسه مثال‌هایی مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت مستوی باشد. A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A(x) = L(x) + B \qquad \text{برای هر } x \in \mathbb{R}^n \tag{۱}$$

که در آن L یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ است و B یک عنصر ثابت $\mathbb{R}^m$. مجموعه‌های تراز A و L یکی هستند، در واقع

$$A^{-1}(c + B) = L^{-1}(c)$$

یعنی مجموعهٔ تراز منسوب به c برای L همان مجموعهٔ تراز منسوب به $c + B$ برای A است. برای تابع خطی L می‌دانیم که مجموعه‌های تراز یا تهی هستند و یا زیرفضاهای خطی موازی و همبعد هستهٔ L می‌باشند.

مثال ۲. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های تراز f را برای مقادیر مختلف $c \in \mathbb{R}$ بررسی می‌کنیم. برای $c < 0$، مجموعهٔ تراز منسوب تهی است، برای $c = 0$، تک نقطه‌ای $\{(0, 0, 0)\}$ حاصل می‌شود، و برای $c > 0$، کرهٔ شعاع $\sqrt{c}$، یعنی مجموعهٔ نقاط (x, y, z) بقیه به شرط $x^2 + y^2 + z^2 = c$ به‌دست می‌آید.

مثال ۳. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که به صورت $f(x,y) = x^۲ - y^۲$ تعریف شده است. نمودار این تابع را در مثال ۴ جلسه قبل بررسی کردیم، اکنون به بررسی مجموعه‌های تراز می‌پردازیم. برای $c = ۰$، مجموعهٔ

$$\{(x,y) \mid x^۲ - y^۲ = ۰\} = \{(x,y) \mid x - y = ۰ \text{ یا } x + y = ۰\}$$

از دو خط راست $x + y = ۰$ و $x - y = ۰$ تشکیل شده است. برای $c > ۰$، هذلولوی دو شاخهٔ $x^۲ - y^۲ = c$ به‌دست می‌آید که رئوس شاخه‌ها در نقاط $(\pm\sqrt{c}, ۰)$ قرار دارند و شاخه‌ها به طرف راست و چپ باز می‌شوند. برای $c < ۰$، نقش x و y تعویض می‌شود. این بار دو رأس هذلولوی در $(۰, \pm\sqrt{c})$ قرار دارند و هذلولوی به طرف بالا و پایین باز می‌شود (شکل ۱).

ارتباط این شکل با نمودار $z = x^۲ - y^۲$ به طریق زیر حاصل می‌شود. به‌ازای $z = c$ با تقاطع صفحه $z = c$ با نمودار متشکل از نقاط به شکل (x,y,c) است. اگر این مقطع را بر صفحهٔ xy تصویر کنیم دقیقاً مجموعهٔ تراز منسوب به c حاصل می‌شود.

مطلب فوق برای هر تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ معتبر است. اگر نمودار تابع را با صفحهٔ $z = c$ قطع کنیم دقیقاً آن بخش نمودار به‌دست می‌آید که بالا سر مجموعهٔ تراز منسوب به c قرار دارد. بدین ترتیب اگر نمودار تابع در دست باشد با قطع کردن آن به وسیلهٔ صفحات $z = c$ و تصویر کردن روی صفحه xy، مجموعه‌های تراز f حاصل می‌شوند. بالعکس چنانچه مجموعه‌های تراز رسم شده باشند، با انتقال هر مجموعهٔ تراز $f^{-۱}(c)$ به ارتفاع $z = c$، نمودار تابع بازسازی می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد که $a \neq \underline{۰}$. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \cdot x \qquad (۲)$$

چون $a \cdot x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$، این در واقع یک تابع خطی است و در مثال ۱ می‌گنجد ولی بررسی مستقیم آن نیز قابل توجه است. می‌دانیم که مجموعهٔ x هایی که در $a \cdot x = c$ صدق می‌کنند یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ است و این ابرصفحه‌ها همه موازی $a \cdot x = 0$ (هستهٔ f = مجموعهٔ x هایی که $x \perp a$) می‌باشند.

مثال ۵. عضوی ثابت $a \neq \underline{0}$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \times x \qquad (3)$$

که مقصود از $a \times x$ ضرب برداری a و x است. تابع (۳) نیز خطی است (هر مؤلفه عبارت درجه ۱ همگن نسبت به x_1, x_2, x_3 است) و در چارچوب مثال ۱ قرار می‌گیرد. این مثال را نیز مستقیماً بررسی می‌کنیم. از آنجا که $a \times x$ بر a عمود است، اگر $c \in \mathbb{R}^3$ در صفحه گذرا از $\underline{0}$ و عمود بر a قرار نداشته باشد، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ تهی است. برای $c = \underline{0}$، مجموعهٔ x هایی که در $a \times x = \underline{0}$ صدق می‌کنند مضارب بردار a هستند، یعنی نقاط روی خطی که از امتداد a پدید می‌آید. این در واقع هستهٔ تابع خطی f است. پس سایر مجموعه‌های تراز ناتهی خطوط راست موازی a می‌باشند. در واقع اشتراک $f^{-1}(c)$ با صفحه عمود بر a باید یگانه بردار b در این صفحه باشد که (a, b, c) یک سه‌تایی راستگرد است و مساحت مستطیل تعیین شده توسط a و b برابر طول c می‌باشد.

مثال ۶. تابع $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت

$$f(x, y, z) = (z, x^2 + y^2 + z^2)$$

تعریف می‌کنیم. به‌ازای $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ عبارت است از:

$$\{(x, y, z) \mid z = c_1\} \cap \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c_2\}$$

برای $c_۲ < ۰$، مجموعهٔ سمت راست و در نتیجه $f^{-۱}(c)$ تهی است. برای $c_۲ = ۰$، مجموعهٔ سمت راست از تک نقطه‌ای $\{(۰,۰,۰)\}$ تشکیل شده است، پس $f^{-۱}(c_۱, ۰)$ تهی است مگر وقتی که $c_۱ = ۰$، و $f^{-۱}(۰,۰)$ نیز تک نقطه‌ای $\{(۰,۰,۰)\}$ است. حال فرض کنید $c_۲ > ۰$. مجموعهٔ سمت راست، یعنی $f_۲^{-۱}(c_۲)$ کرهٔ شعاع $\sqrt{c_۲}$ به مرکز ۰ است. برای این که مجموعهٔ سمت چپ، یعنی $f_۱^{-۱}(c_۱)$، با $f_۲^{-۱}(c_۲)$ اشتراک ناتهی داشته باشد، شرط لازم و کافی این است که $-\sqrt{c_۲} \le c_۱ \le \sqrt{c_۲}$. وقتی $c_۱ = \pm\sqrt{c_۲}$، صفحهٔ $z = \pm\sqrt{c_۲}$ بر کره مماس می‌شود و یک تک نقطه‌ای به عنوان مجموعهٔ تراز حاصل می‌شود $((۰,۰,\pm\sqrt{c_۲}))$ بسته به این که صفحه $z = \sqrt{c_۲}$ یا صفحه $z = -\sqrt{c_۲}$ در نظر گرفته شود). برای $-\sqrt{c_۲} < c_۱ < \sqrt{c_۲}$، $f^{-۱}(c_۱, c_۲)$ دایرهٔ تقاطع کره با صفحهٔ $z = c_۱$ است. بدین ترتیب مجموعه‌های تراز ناتهی تابع f عبارتند از تک نقطه‌ای‌های روی محور z و دایره‌های به مرکز روی محور z که در صفحات افقی $z = c$ قرار دارند.

در اینجا مسأله زیر را مطرح می‌کنیم. در مورد تابع‌های مستوی دیدیم که مجموعه‌های تراز شکل‌های ساده و یکنواختی دارند. به عنوان گام بعدی، آیا می‌توان حکمی کلی در مورد مجموعه‌های تراز یک تابع درجه ۲ عنوان کرد؟ تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_۱, \ldots, x_n) = a_۰ + a_۱x_۱ + \cdots + a_nx_n + \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (۴)$$

که در اینجا a_i ها و a_{ij} ها اعداد حقیقی داده شده‌اند. طرف راست (۴) کلی‌ترین عبارت درجه دوم برحسب $x_۱, \ldots, x_n$ است. سؤال این است که مجموعه‌های تراز تابعی به شکل f در (۴) چگونه اشکالی هستند. در آینده خواهیم دید که با "دوران" مناسب در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌توان فقط صورت‌هایی از (۴) را در نظر گرفت

که در آن جملات مخلوط درجه دوم، یعنی x_ix_j با $i \neq j$، وجود نداشته باشند، یعنی کافی است تابع‌های درجه دوم به شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$f(x_۱, \ldots, x_n) = a_۰ + a_۱x_۱ + \cdots + a_nx_n + a_{۱۱}x_۱^۲ + a_{۲۲}x_۲^۲ + \cdots + a_{nn}x_n^۲ \qquad (۵)$$

در این جلسه و جلسهٔ بعد دو حالت $n = ۲$ و $n = ۳$ را توصیف می‌کنیم.

در حالت $n = ۲$ اگر به جای $x_۱$ و $x_۲$ نمادهای معمولتر x و y را به‌کار گیریم، داریم

$$f(x,y) = a_۰ + a_۱x + a_۲y + a_{۱۱}x^۲ + a_{۲۲}y^۲ \qquad (٦)$$

مجموعه‌های تراز چنین تابعی به مقاطع مخروطی معروفند به این دلیل که از نظر هندسی این منحنی‌ها را می‌توان به صورت مقطع یک صفحه و یک مخروط به‌دست آورد (شکل ۴). در واقع مقاطع مخروطی از دوران باستان شناخته شده بودند و کتاب مخروطات آپولونیوس که بیش از ۲۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده رسالهٔ جامعی در بررسی این اشکال است. سه شکل "سهمی"، "بیضی" و "هذلولی" که در شکل نمایش داده شده‌اند، سه نوع عمدهٔ مقاطع مخروطی هستند.

حال برای f در (٦) می‌خواهیم مجموعهٔ (x,y) هایی را که در $f(x,y) = ۰$ صدق می‌کنند بررسی کنیم. نتایج به‌دست آمده همهٔ اشکال ممکن $f(x,y) = c$ را در بر می‌گیرند زیرا با جذب c در ضریب ثابت $a_۰$، می‌توان طرف راست را برابر صفر قرار داد. چند حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $a_{۱۱} = a_{۲۲} = ۰$. در این حالت در وضعیت تابع‌های مستوی قرار می‌گیریم که قبلاً بررسی شده‌اند.

ب) یکی از $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ صفر و دیگری ناصفر. مثلاً فرض کنید $a_{۱۱} \neq ۰$ و $a_{۲۲} = ۰$. در این صورت با تکمیل مجذور، f به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x,y) = A_۰ + a_{۱۱}(x-h)^۲ + a_۲y \qquad (۷)$$

اگر $a_۲ \neq ۰$، با قرار دادن $f(x,y) = ۰$ و تقسیم بر $a_۲$، عبارتی به شکل:

$$y = A(x-h)^۲ + B \quad , \quad A = \frac{a_{۱۱}}{a_۲} \neq ۰$$

به‌دست می‌آید. که سهمی نام دارد. بسته به این که $A > ۰$ یا $A < ۰$ یکی از دو منحنی نمایش داده شده در شکل ۵ حاصل می‌شود.

به عنوان مقطع مخروطی، سهمی از تقاطع یک صفحه موازی یکی از خطوط مولد مخروط به‌دست می‌آید. اگر در (۷) داشته باشیم $a_{۲۲} = ۰$، آنگاه $f(x,y) = ۰$، بسته به علامت $A_۰$ و $a_{۱۱}$، دو خط راست قائم، یک خط راست یا تهی است.

حال فرض کنید $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ هر دو ناصفر باشند. در این صورت با تکمیل مجذورها در (٦) به عبارت زیر می‌رسیم:

$$f(x,y) = a_{۱۱}(x-h)^۲ + a_{۲۲}(y-k)^۲ + A_۰ \qquad (۸)$$

در اینجا دو حالت در نظر می‌گیریم:

ج) $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ همعلامت باشند. در این صورت اگر $A_۰$ نیز همعلامت با $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ باشد، $f(x,y)$ همواره مثبت یا همواره منفی است، یعنی در $f(x,y) = ۰$ هیچ نقطه‌ای صدق نمی‌کند. اگر $A_۰ = ۰$، آنگاه تنها نقطه (h,k) در $f(x,y) = ۰$ صدق می‌کند. بالاخره اگر علامت $A_۰$ از علامت $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ متفاوت باشد، در $f(x,y) = ۰$، $A_۰$ را به طرف دیگر معادله برده بر $-A_۰$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(x-h)^۲}{-A_۰/a_{۱۱}} + \frac{(y-k)^۲}{-A_۰/a_{۲۲}} = ۱$$

از آنجا که علامت $A_۰$ با علامت $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ متفاوت بود، هر یک از دو مخرج بالا مثبت است و می‌توان هر یک را به صورت یک مجذور نوشت، پس داریم:

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲} + \frac{(y-k)^۲}{b^۲} = ۱ \qquad (۹)$$

این معادلهٔ یک بیضی به مرکز نقطهٔ (h,k) است (شکل ٦).

د) $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ مختلف العلامه باشند. در این صورت نیز اگر $A_۰ \neq ۰$، با محاسبه‌ای عیناً مانند فوق به یکی از دو عبارت زیر می‌رسیم (بسته به این که $A_۰$ با کدامیک از $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ همعلامت باشد):

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲} - \frac{(y-k)^۲}{b^۲} = ۱ \qquad (۱۰)$$

یا

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (11)$$

هر یک از این دو منحنی یک هذلولی نام دارد. هر هذلولی از دو شاخه قرینه تشکیل شده است (شکل ۹)

بالاخره در این حالت اگر $A_0=0$، آنگاه $f(x,y)=0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a^2(x-h)^2-b^2(y-k)^2=0 \qquad (12)$$

که در آن $a^2=|a_{11}|$ و $b^2=|a_{22}|$. این نمایش جبری دو خط راست متقاطع با ضریب زاویه‌های $\pm\frac{a}{b}$ است که از نقطهٔ (h,k) می‌گذرند. ضمناً هر یک از شاخه‌های هذلولی‌های (۱۰) و (۱۱) بر دو خط راست (۱۲) مجانبند.