

تابع‌های چند متغیری

فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^n است. می‌خواهیم تابع‌های $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ را بررسی کنیم. بدین ترتیب f به هر n تایی $x = (x_1, \dots, x_n)$ یک m تایی $y = (y_1, \dots, y_m)$ نسبت می‌دهد:

$$y = f(x) \quad (۱)$$

هر y_i خود به $x = (x_1, \dots, x_n)$ وابسته است و می‌توان f را متشکل از m تابع $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ دانست که $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (۲)$$

می‌نویسیم $f = (f_1, \dots, f_m)$ و هر f_i را یک مؤلفه f می‌نامیم.

اگر S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد، یعنی $n = ۱$ ، و $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی $m = ۱$ ، عادت داریم که از نمودار f زیرمجموعه $\{(x, f(x)) \mid x \in S\}$ از \mathbb{R}^2 است. بسیاری اوقات می‌توان با نگاه کردن به نمودار f خصوصیات رفتاری f را به سادگی دریافت. در مورد تابع‌های $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $S \subset \mathbb{R}^n$ ، به بررسی سه روش “نمودار”، “تصویر”، و “مجموعه تراز” برای تجسم هندسی رفتار تابع می‌پردازیم. هریک از این روش‌ها در محدوده خاصی از ترکیب بعدها، یعنی m و n ، کارساز است.

(۱۶-۱) نمودار. برای تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$, $S \subset \mathbb{R}^n$, نمودار f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in S\} \quad (۳)$$

توجه کنید که $x = (x_1, \dots, x_n)$ یک n تایی و $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ یک m تایی است، بنابراین هر نقطه نمودار یک $(n+m)$ تایی است یعنی نمودار یک زیرمجموعه \mathbb{R}^{n+m} است. این نکته اشکال استفاده از نمودار در ابعاد بالا را روشن می‌سازد. وقتی $n+m$ از ۳ بزرگتر باشد نمی‌توان از نیروی باصره برای تجسم نمودار و کمک به مشاهده رفتار تابع یاری جست. استفاده ما از نمودار معمولاً محدود به حالت‌های $m=n=1$ و $m=1, n=2$ است. در حالت $m=1, n=2$ نیز که مربوط به خم‌های پارامتری در صفحه می‌شود، در آینده خواهیم دید که روش بعدی ما (بررسی "تصویر") معمولاً مؤثرتر است. در زیر تعدادی مثال برای حالت $m=1, n=2$ مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x, y, z) = Ax + By + C$ در نظر می‌گیریم که در آن A, B و C اعداد حقیقی داده شده‌اند. اگر مقدار $f(x, y)$ را به z نمایش دهیم، نمودار تابع عبارت است از مجموعه:

$$\{(x, y, z) \mid z = Ax + By + C\}$$

بدین ترتیب نقاط (x, y, z) روی نمودار دقیقاً نقاطی هستند که در رابطه $Ax + By - z + C = 0$ صدق می‌کنند. این مجموعه یک صفحه در \mathbb{R}^3 است که با محور z موازی نیست (بر صفحه xy عمود نیست).

مثال ۲. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x, y) = x^2 + y^2$ تعریف می‌کنیم. می‌نویسیم $z = f(x, y)$. نسبت به مختصات قطبی داریم $z = r^2$ ، یعنی نقاط نمودار، (x, y, z) ، به این ترتیب به دست می‌آیند که اگر xy را صفحه افقی و محور z را عمود بر آن تصور کنیم، نقطه (x, y, z) که

بالا سر (x, y) قرار دارد؛ ارتفاعش از صفحه xy برابر مجذور فاصله (x, y) از \underline{e} است. بدین ترتیب نمودار f از دوران دادن یک سهمی حول محور z به دست می آید (شکل ۱).

مثال ۳. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می گیریم که با دستور $f(x, y) = x^2$ تعریف شده است. بدین ترتیب نقاط روی نمودار سه تایی های به شکل $(x, y, z) = (x, y, x^2)$ هستند. مقدار z فقط به مؤلفه اول، یعنی x ، وابسته است. شکل ۲ نمودار این تابع را نشان می دهد. توجه کنید که اگر سهمی $z = x^2$ را در صفحه xz در امتداد محور y حرکت دهیم نمودار f حاصل می شود.

مثال ۴. این بار تابع درجه دوی دیگری به شکل $f(x, y) = x^2 - y^2$ در نظر می گیریم. نمودار از نقاط به صورت $(x, y, z) = (x, y, x^2 - y^2)$ تشکیل شده است. بالا سر محور x ، یعنی برای $y = 0$ ، سهمی $z = x^2$ به عنوان بخشی از نمودار ظاهر می شود. بالا سر محور y ، یعنی وقتی $x = 0$ ، سهمی وارونه $z = -y^2$ به عنوان بخش دیگری از نمودار مشاهده می گردد. برای تجسم کامل نمودار می توان مثلاً به صورت زیر عمل کرد. به ازای هر $y = c$ ثابت، بخشی از نمودار که بالا سر خط راست $y = c$ قرار دارد در نظر می گیریم و با کنار هم چیدن این بخش ها شکل کامل نمودار را به دست می آوریم. بالا سر این خط داریم $z = x^2 - c^2$ که یک سهمی است. رأس این سهمی در نقطه $(0, c, -c^2)$ قرار دارد ولی شکل هندسی آن ثابت است. وقتی $|c|$ بزرگ می شود این سهمی، با حفظ شکل رو به پایین حرکت می کند به طوری که رأس آن همواره روی سهمی $z = -y^2$ تکیه دارد.

مثال های بالا نشان می دهد نمودار تابع های درجه دوم دو متغیری از تنوع بیشتری نسبت به تابع های یک متغیری برخوردار است.

(۱۶-۲) تصویر. در حالت $m = n$ (و همچنین در حالت $n = 1, m > 1$ که بعداً جداگانه بررسی خواهد شد) روش بررسی تصویر که در زیر می آید بسیاری اوقات روشی مؤثر برای درک عملکرد یک تابع است. به خصوص وقتی $n = 2, 3$ ، این روش کمک بصری قابل توجهی است. در

این روش دو نسخه از $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ در نظر می‌گیریم. یکی به عنوان فضای مبدأ (دامنه) و دیگری به عنوان فضای مقصد (برد)، و آنگاه تصویر مجموعه‌های گوناگون در فضای مبدأ را تحت اثر f در فضای مقصد مطالعه می‌کنیم. چنانچه مجموعه‌های مناسبی در فضای مبدأ در نظر گرفته شوند (و این برای تابع‌های گوناگون متفاوت خواهد بود)، برداشت سودمندی از عملکرد تابع حاصل می‌شود.

مثال ۵. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

نقاط فضای مقصد (برد) را به (u, v) نمایش می‌دهیم، پس:

$$u = x \cos y, \quad v = x \sin y$$

هدف ما بررسی اثر هندسی f بر شکل مجموعه‌های مناسبی در صفحه xy است، یعنی برای مجموعه داده شده S در صفحه xy می‌خواهیم شکل $f(S)$ که زیرمجموعه‌ای از صفحه uv است پیدا کنیم. کلید موفقیت این روش معمولاً انتخاب مناسب مجموعه در دامنه است. وقتی شکل خاصی به ذهن نرسد، معمولاً از ساده‌ترین اشکال شروع می‌کنیم. ساده‌ترین زیرمجموعه \mathbb{R}^2 یک تک نقطه‌ای است ولی چون هر تک نقطه به یک تک نقطه نگاشته می‌شود، اطلاع چندانی از این بررسی حاصل نمی‌شود. پس از نقطه، شاید ساده‌ترین مجموعه‌ها خطوط راست باشند. در این مثال اثر f را بر خطوط راست قائم $x = a$ و خطوط راست افقی $y = b$ بررسی می‌کنیم. برای a داده شده تصویر خط راست $x = a$ عبارت است از زوج‌های مرتب (u, v) که:

$$u = a \cos y, \quad v = a \sin y, \quad y \in \mathbb{R}$$

اگر a ثابت باشد و y در \mathbb{R} مقدار بگیرد، نقطه (u, v) دایره شعاع $|a|$ را می‌پیماید. از آنجا که $\cos y$ و $\sin y$ هر یک دوره تناوب 2π دارند، خط راست $x = a$ تحت اثر f بی‌نهایت بار دایره شعاع $|a|$ را

می‌پیماید. ضمناً برای $\pm a$ ، دو خط $x = a$ و $x = -a$ هر دو بر این دایره شعاع $|a|$ نگاشته می‌شوند. در حالت $a = 0$ ، تمام خط $x = 0$ (محور y) به مبدأ مختصات در صفحه uv فرستاده می‌شود (شکل ۵). حال به بررسی اثر f روی خطوط افقی $y = b$ می‌پردازیم. تصویر نقطه (x, b) نقطه (u, v) به صورت زیر است:

$$u = x \cos b, \quad v = x \sin b, \quad y \in \mathbb{R}$$

برای b ثابت، نقطه (u, v) روی خط راست $(\sin b)u - (\cos b)v = 0$ در صفحه uv قرار دارد و با تغییر x کلیه نقاط روی این خط به دست می‌آیند. این یک خط راست گذرا از مبدأ صفحه uv با ضریب زاویه $\tan b$ است (وقتی b به شکل $k\pi + \frac{\pi}{4}$ باشد، محور v حاصل می‌شود) (شکل ۶).

حال تصویر مستطیل به صورت $a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2$ را در تحت اثر f پیدا می‌کنیم. تصویر باید در حلقه بین دو دایره شعاع‌های $|a_1|$ و $|a_2|$ حول مبدأ صفحه uv قرار گیرد. از سویی دیگر تصویر باید محصور به دو خط راست گذرا از مبدأ با ضریب زاویه‌های $\tan b_1$ و $\tan b_2$ باشد، پس نوعاً تصویری مانند شکل ۷ به دست خواهد آمد.

به عنوان نمونه دیگر، تصویر شکل H مانند متشکل از دو خط راست $x = \pm 1$ و پاره خط $-1 \leq x \leq 1, y = 0$ ، عبارت است از دایره شعاع واحد حول u در صفحه uv به انضمام قطر $-1 \leq u \leq 1, v = 0$ ، زیرا که

هر دو خط راست $x = \pm 1$ به یک دایره نگاشته می‌شوند.

(۱۶-۳) مجموعه تراز. در بررسی تابع‌های خطی و مستوی به مجموعه‌های تراز برخوردیم. به طور کلی برای $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، به ازای هر $c \in \mathbb{R}^m$ ، مجموعه تراز منسوب به c عبارت است از:

$$f^{-1}(c) = \{x \in S \mid f(x) = c\} \quad (4)$$

وقتی f یک تابع خطی یا مستوی باشد. دیدیم که مجموعه‌های تراز ناتهی همه همبعد و موازی

هستند. در مورد تابع‌های غیرخطی، تنوع وافری می‌تواند حکمفرما باشد ولی خواهیم دید که رویهمرفته بررسی نظام مجموعه‌های تراز راهگشای درک رفتار یک تابع است. در جلسه آینده تابع‌های گوناگونی را از این دیدگاه مطالعه خواهیم کرد. لازم به ذکر است که بررسی مجموعه‌های تراز در بسیاری مسائل عملی نیز معمول است. مثلاً در نقشه‌های هواشناسی گاهی نقاط همدم (در یک ساعت معین روز) با رسم منحنی‌هایی که هر یک مشخص‌کننده یک دمای خاص است نمایش داده می‌شوند، در نقشه‌های جغرافیای طبیعی نقاط هم ارتفاع از سطح دریا روی یک منحنی نشان داده می‌شوند، و در نقشه پوشش ماهواره‌ها از سطح زمین، نقاطی که قدرت دریافت سیگنال ماهواره در آنها برابر است با یک منحنی به هم وصل می‌شوند. این جلسه را با ذکر یک نکته کلی به پایان می‌بریم.

برای تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $f = (f_1, \dots, f_m)$ ، برای $c \in \mathbb{R}^m$ داده شده داریم $c = (c_1, \dots, c_m)$ و:

$$\begin{aligned} f^{-1}(c) &= \{x \in S \mid f(x) = c\} \\ &= \{x \in S \mid f_1(x) = c_1, \dots, f_m(x) = c_m\} \\ &= \{x \in S \mid f_1(x) = c_1\} \cap \dots \cap \{x \in S \mid f_m(x) = c_m\} \end{aligned}$$

پس:

$$f^{-1}(c) = f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_m^{-1}(c_m) \quad (5)$$

یعنی مجموعه تراز منسوب به c برابر اشتراک مجموعه‌های تراز تابع‌های f_1, \dots, f_m ، به ترتیب منسوب به c_1, \dots, c_m می‌باشد.