مساحت، حجم و ضرب برداری در $\mathbb{R}^۳$

در بین مفاهیم هندسی که تاکنون در $\mathbb{R}^n$ بررسی کرده‌ایم اثری از مساحت، حجم و تعمیم آنها به نوعی مفهوم برای سنجش "محتوای nـ بعدی" نبوده است. برای اقدام به این کار لازم است وجه مشترکی میان طول، مساحت و حجم بیابیم که قابلیت تعمیم به هر بعد داشته باشد. در اینجا نخست مفهوم ضرب برداری در $\mathbb{R}^۳$ را یادآوری می‌کنیم.

برای $u, v \in \mathbb{R}^۳$، $u = (u_۱, u_۲, u_۳)$ و $v = (v_۱, v_۲, v_۳)$، حاصل‌ضرب برداری، $u \times v \in \mathbb{R}^۳$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u \times v = (u_۲v_۳ - u_۳v_۲, u_۳v_۱ - u_۱v_۳, u_۱v_۲ - u_۲v_۱) \qquad (۱)$$

(۱۵—۱) ویژگی‌های ابتدایی ضرب خارجی

(۱۵—۱—۱) (ضد تقارن) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^۳$ داریم

$$u \times v = -v \times u \qquad (۲)$$

بالاخص

$$u \times u = \underline{\circ} \qquad (۳)$$

اثبات. در فرمول (۱) اگر نقش u, v تعویض شود، هر مؤلفه در (-۱) ضرب می‌شود. اگر در (۲) قرار دهیم $u = v$، نتیجه می‌شود که $v \times u = -(u \times u)$، پس لزوماً $u \times u = 0$. □

(۱۵—۱—۲) (قوانین پخشی) برای هر $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w) \quad , \quad u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w) \qquad (۴)$$

اثبات. این دو قانون با محاسبهٔ سر راست از (۱) حاصل می‌شوند. محاسبه به خواننده واگذار می‌شود. □

(۱۵—۱—۳) برای $u, v \in \mathbb{R}^3$ و $r \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(ru) \times v = r(u \times v) \quad , \quad u \times (rv) = r(u \times v) \qquad (۵)$$

اثبات. اگر در (۱) یکی از u یا v در r ضرب شود، هر مؤلفه طرف راست در r ضرب می‌شود. □

(۱۵—۱—۴) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$v \cdot (u \times v) = 0 \quad , \quad u \cdot (u \times v) = 0 \qquad (٦)$$

اثبات. این نیز یک محاسبهٔ سرراست است:

$$\begin{aligned} u \cdot (u \times v) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب اتحاد دیگر ثابت می‌شود. □

(۱۵–۱–۵) (رابطه با ضرب داخلی) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^۳$ داریم:

$$|u \times v|^۲ + |u \cdot v|^۲ = |u|^۲|v|^۲ \tag{۷}$$

اثبات. توجه کنید که مقصود از $|u \times v|$ طول سه‌تایی $u \times v$ است و مقصود از $|u \cdot v|$ قدرمطلق عدد $u \cdot v$. اتحاد (٦) به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned}&(u_۲v_۳ - u_۳v_۲)^۲ + (u_۳v_۱ - u_۱v_۳)^۲ + (u_۱v_۲ - u_۲v_۱)^۲ + (u_۱v_۱ + u_۲v_۲ + u_۳v_۳)^۲\\ &= (u_۱^۲ + u_۲^۲ + u_۳^۲)(v_۱^۲ + v_۲^۲ + v_۳^۲)\end{aligned} \tag{۸}$$

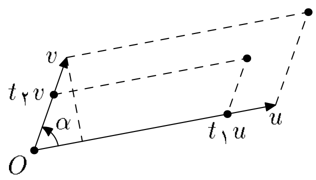
صحت این اتحاد جبری را می‌توان با محاسبه تحقیق کرد. □

اگر $\{u, v\}$ وابسته خطی باشد، مثلاً $v = ru$، برای عدد حقیقی r، آنگاه از (۵) و (۲) نتیجه می‌شود $u \times v = ۰$. البته این مطالب از (۷) نیز نتیجه می‌شود زیرا که اگر $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد، آنگاه $|u \cdot v| = |u||v|$. حال فرض کنید $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، بالاخص $u \neq ۰$ و $v \neq ۰$. در این صورت u, v هر یک یک نیم‌خط تعریف می‌کنند (مضارب مثبت این بردار). α را زاویهٔ اندازه‌گیری شده در جهت مثلثاتی از نیم‌خط u به نیم‌خط v می‌گیریم. از آنجا که $u \cdot v = |u||v|\cos\alpha$، از (۷) نتیجه می‌شود که:

$$|u \times v| = |u||v||\sin\alpha| \tag{۹}$$

عبارت طرف راست در واقع مساحت متوازی‌الاضلاعی است که توسط u, v ایجاد می‌شود. به طور دقیقتر، مقصود از متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط u, v مجموعهٔ زیر است:

$$P(u, v) = \{t_۱u_۱ + t_۲v \mid ۰ \leq t_۱ \leq ۱, ۰ \leq t_۲ \leq ۱\}$$



شکل ۱

توجه کنید که ارتفاع وارد بر "قاعده" u، دارای طول $|v||\sin\alpha|$ است، پس $|u||v||\sin\alpha|$ فی‌الواقع مساحت $P(u,v)$ است.

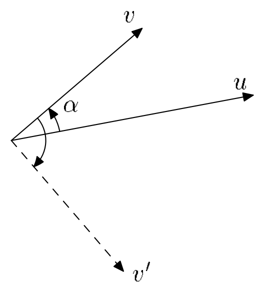
بدین ترتیب تاکنون به این نتایج در مورد $u\times v$ رسیده‌ایم: اگر $\{u,v\}$ وابستهٔ خطی باشد، $u\times v$ برابر $\underline{\circ}$ است و اگر $\{u,v\}$ مستقل خطی، آنگاه $u\times v$ بر صفحه u,v عمود است (بنابر (٦)) و طول آن برابر $|u||v||\sin\alpha|$ می‌باشد. در واقع حالت وابستگی خطی را می‌توان حالت خاص حکم دوم دانست زیرا که در آن صورت $\sin\alpha=\circ$ و چون $u\times v=\underline{\circ}$، این حاصل‌ضرب بر هر صفحهٔ شامل u,v عمود است (به مفهوم صفر شدن ضرب داخلی). حال در حالت استقلال خطی، دقیقاً دو سه‌تایی با طول $|u||v||\sin\alpha|$ وجود دارند که بر صفحهٔ u,v عمودند. برای مشخص کردن این که کدام یک برابر $u\times v$ است از مفهوم دترمینان کمک می‌گیریم.

نخست دترمینان‌های ۲×۲ و پس از آن دترمینان‌های ۳×۳ را در نظر می‌گیریم. اگر $u=(u_1,u_2)$ و $v=(v_1,v_2)$ دو عنصر $\mathbb{R}^۲$ باشند، مؤلفه‌های u,v را به ترتیب در ستون‌های اول و دوم یک ماتریس ۲×۲ به صورت زیر قرار می‌دهیم

$$M=\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس M بنابر تعریف برابر $u_1v_2-u_2v_1$ است. معنی هندسی این عبارت رابررسی می‌کنیم. اگر (v_1,v_2) را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در جهت عقربهٔ ساعت دوران دهیم بردار v' به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$v'=(v_2,-v_1)$$

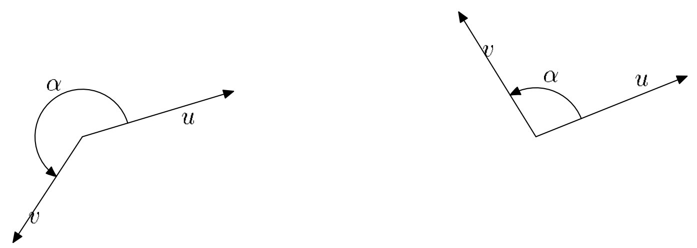


شکل ۲

(این مطلب را می‌توان با ضرب کردن ماتریس $\begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ در ستون $|v\rangle$ مشاهده کرد.) بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} u_1 v_2 - u_2 v_1 &= u \cdot v' \\ &= |u||v'| \cos \measuredangle(u, v') \\ &= |u||v| \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) \\ &= |u||v| \sin \alpha \end{aligned}$$

قدرمطلق عبارت سمت راست اندازهٔ مساحت $P(u,v)$ و علامت آن به علامت $\sin\alpha$ وابسته است. اگر $\{u,v\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\sin\alpha = 0$ و $\det M$ صفر می‌شود. ولی چنانچه $\{u,v\}$ مستقل خطی باشد، اگر زاویه α (از نیم‌خط تعیین شده توسط u به نیم‌خط تعیین شده توسط v) بین 0 و π باشد، $\sin\alpha > 0$ و $\det M$ مثبت است. ولی اگر زاویهٔ α بین π و 2π باشد، $\sin\alpha < 0$ و $\det M$ منفی است



شکل ۳

یک زوج مرتب برداری (u, v) در صفحه مانند (الف) در شکل (۳) را "راستگرد" و یک زوج مرتب برداری مانند (ب) در شکل (۳) را "چپگرد" می‌نامند. تمایز این دو وضعیت را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد. چنانچه با گردش کوچکتر از یک نیم صفحه در جهت مثلثاتی از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب راستگرد خوانده می‌شود ولی چنانچه با گردش کوچکتر از یک نیم صفحه در جهت عقربه ساعت از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب چپگرد محسوب می‌شود.

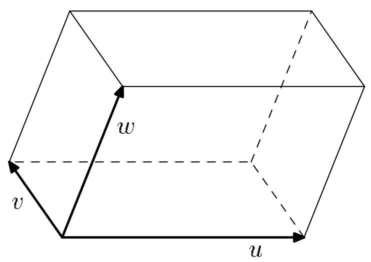
با توجه به بحث بالا، می‌توان زوج مرتب (u, v) را راستگرد (به ترتیب چپگرد) تعریف کرد اگر $\det M > ۰$ (به ترتیب $\det M < ۰$) بنابراین $\det M$ مشخص کنندهٔ دو اطلاع زیر است:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر مساحت متوازی‌الاضلاع $P(u, v)$ است.

ب) $\det M = ۰$ اگر و تنها اگر $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\det M > ۰$ (به ترتیب $\det M < ۰$) اگر و تنها اگر زوج مرتب (u, v) راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.

این ملاحضات را می‌توان به $\mathbb{R}^۳$ تعمیم داد. فرض کنید $u = (u_۱, u_۲, u_۳)$، $v = (v_۱, v_۲, v_۳)$ و $w = (w_۱, w_۲, w_۳)$ عناصر $\mathbb{R}^۳$ باشند. مقصود از متوازی السطوح ایجاد شده توسط u، v و w مجموعهٔ زیر است:

$$P(u, v, w) = \{t_۱ u + t_۲ v + t_۳ w \mid ۰ \leq t_i \leq ۱, i = ۱, ۲, ۳\} \qquad (۱۰)$$



شکل ۴

اگر سه‌تایی $\{u, v, w\}$ وابستهٔ خطی باشد، سه بردار در یک صفحه قرار می‌گیرند و حجم این متوازی السطوح صفر است. در غیر این صورت، برای به‌دست آوردن حجم باید مساحت یک قاعده (مثلاً متوازی الاضلاع $P(u, v)$) را در ارتفاع وارد بر این قاعده ضرب کنیم. ارتفاع وارد قاعدهٔ $P(u, v)$ برابر طول تصویر قائم w بر امتداد عمود بر صفحهٔ u, v است. امتداد عمود بر صفحه توسط $u \times v$ تعیین می‌شود، پس

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{|w \cdot (u \times v)|}{|u \times v|^{۲}} |u \times v|$$

و در نتیجه چون مساحت قاعده برابر $|u \times v|$ است:

$$\begin{aligned} \text{حجم } P(u, v, w) &= |w \cdot (u \times v)| \\ &= |w_۱(u_۲v_۳ - u_۳v_۲) + w_۲(u_۳v_۱ - u_۱v_۳) + w_۳(u_۱v_۲ - u_۲v_۱)| \end{aligned} \tag{۱۱}$$

حال مانند حالت دو بعدی، مؤلفه‌های سه بردار u، v و w را به ترتیب در ستون‌های یک ماتریس ۳×۳ قرار می‌دهیم:

$$M = \begin{bmatrix} u_۱ & v_۱ & w_۱ \\ u_۲ & v_۲ & w_۲ \\ u_۳ & v_۳ & w_۳ \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس را با بسط نسبت به ستون سوم محاسبه می‌کنیم:

$$\det M = w_۱(u_۲v_۳ - u_۳v_۲) + w_۲(u_۳v_۱ - u_۱v_۳) + w_۳(u_۱v_۲ - u_۲v_۱) \tag{۱۲}$$

از مقایسهٔ (۱۲) و (۱۱) می‌بینیم که قدرمطلق دترمینان M همان حجم متوازی السطوح $P(u, v, w)$ است. در مورد علامت، سه‌تایی مرتب (u, v, w) در $\mathbb{R}^۳$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم در صورتی که $\det M > ۰$ (به ترتیب $\det M < ۰$). توجه کنید که $\det M = ۰$ اگر و تنها اگر سه‌تایی $\{u, v, w\}$ وابستهٔ خطی باشد (در این وضعیت یکی از ستون‌های M ترکیبی خطی از دو ستون دیگر است و دترمینان صفر می‌شود). به این ترتیب مجدداً $\det M$ مشخص کنندهٔ دو اطلاع زیر است:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر حجم متوازی‌السطوح $P(u, v, w)$ است.

ب) $\det M = 0$ اگر و تنها اگر $\{u, v, w\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) اگر و تنها اگر سه‌تایی مرتب (u, v, w) راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.

ضمناً با توجه به این که می‌توان به جای بسط نسبت به ستون سوم، از ستون‌های دیگر نیز استفاده کرد، و این که تعویض جای دو ستون مقدار دترمینان را در (-1) ضرب می‌کند، روابط زیر برقرارند:

$$u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = -w \cdot (v \times u) = -v \cdot (u \times w) = -u \cdot (w \times v) \quad (13)$$

قدرمطلق هر یک از این عبارت‌ها حجم متوازی‌السطوح $P(u, v, w)$ به صورت حاصل‌ضرب یک قاعده در ارتفاع وارد بر آن است.

در اینجا راهی برای تعریف "حجم nـ بعدی"، دست کم برای تعمیم متوازی الاضلاع و متوازی‌السطوح به نظر می‌رسد. اگر $u_1 = (u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1})$، ... ، $u_n = (u_{1n}, \ldots, u_{nn})$، n عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، متوازی‌السطوح nـ بعدی ایجاد شده توسط $u_1, \ldots, u_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(u_1, \ldots, u_n) = \{t_1 u_1 + \cdots + t_n u_n \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\} \quad (14)$$

با قرار دادن مؤلفه‌های u_1 تا u_n در یک ماتریس $n \times n$ داریم:

$$M = \begin{bmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

اگر مفهوم دترمینان یک ماتریس $n \times n$ در دست باشد، قاعدتاً باید n تایی مرتب $(u_1, \ldots, u_n)$ را "راستگرد" (به ترتیب "چپگرد") بنامیم اگر $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$)، و $\det M = 0$ باید معادل وابستگی خطی $\{u_1, \ldots, u_n\}$ باشد. همچنین $|\det M|$ را باید "حجم nـ بعدی $P(u_1, \ldots, u_n)$" تعریف کرد. تعمیم دترمینان به ماتریس‌های $n \times n$ و پیگیری این مفاهیم در آینده انجام خواهد شد.

به سؤال اولیه‌ای که بحث بالا را پیش آورد باز می‌گردیم. اگر $\{u, v\}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی باشد، می‌خواستیم بدانیم $u \times v$ کدامیک از دو بردار عمود بر صفحه u, v به طول $|u||v||\sin\alpha|$ است. اکنون ادعا می‌کنیم:

(۱۵—۲) اگر $\{u, v\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشد، سه‌تایی مرتب $(u, v, u \times v)$ راستگرد است.

اثبات. باید نشان دهیم دترمینان ماتریس زیر مثبت است:

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_2 & v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_3 & v_3 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

اگر دترمینان را با بسط نسبت به ستون سوم محاسبه کنیم حاصل می‌شود:

$$\det M = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

اگر $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، دست کم یکی از سه عبارت بالا صفر نیست و $\det M > 0$. □

بدین ترتیب $u \times v$ از نظر هندسی به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود.

تمرین. متوازی الاضلاعی با مساحت A در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید و آن را به طور قائم روی سه صفحه مختصاتی x_1x_2، x_1x_3 و x_2x_3 تصویر کنید. مساحت متوازی الاضلاع‌های حاصل شده را به ترتیب A_1، A_2 و A_3 بنامید. ثابت کنید:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$