

(۱) نوع نقاط بحرانی هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

ب) $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$

ج) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

د) $f(x, y) = x^3 - y^2$

ه) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

و) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$

(۲) اکسترمم مطلق توابع داده شده را (روی ناحیه داده شده) در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ روی \mathbb{R}^2

ب) $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}$ روی $x^2 + y^2 \leq 1$

ج) $f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ روی $y \geq 0$

د) $f(x, y) = xye^{-xy}$ روی $x \geq 0, y \geq 0$

ه) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2$ روی $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

و) $f(x, y, z) = xy + z^2$ روی $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

(۳) اگر α, β, γ زوایای یک مثلث باشند، ثابت کنید $\sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} \sin \frac{\gamma}{4} \leq \frac{1}{8}$

(۴) کمترین و بیشترین فاصله نقطه $(0, -1)$ را از نیم‌دایره $y = \sqrt{1-x^2}$ بیابید.

(۵) کمترین فاصله مبدأ را تا رویه $xyz^2 = 1$ تعیین کنید.

(۶) کمترین فاصله نقطه $(2, -2, 3)$ را از فصل مشترک دو صفحه $2x - y + 3z = 1$ و

$-x + 3y + z = -3$ بیابید.

(۷) کمترین فاصله مبدا را تا فصل مشترک رویه $z = \frac{3}{4} - x^2 - y^2$ و صفحه $x + 2y = 1$ تعیین کنید.

(۸) اگر $1 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ مطلوب است ماکزیمم و مینیمم مقدار

الف) $x_1 + \dots + x_n$.

ب) $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$.