تمرین درس ریاضی عمومی I نیمسال اول ۸۱–۸۰ گروه‌های (۱۷–۲۴) مدرس: دکتر تابش

۱) فرض کنید نگاشت $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+2x_3, 2x_1+x_2, -x_1-2x_2+2x_3)$$

الف) نشان دهید T خطی است.

ب) تحت چه شرایطی روی a,b,c، بردار (a,b,c) در برد T است.

ج) تحت چه شرایطی روی a,b,c، بردار (a,b,c) در هسته T است.

د) پایه‌ای برای برد و هسته T بیابید.

۲) k را طوری تعیین کنید که دستگاه‌های داده شده دارای تعداد نامتناهی جواب باشند و سپس برای مقادیر به‌دست آمده دستگاه را حل کنید.

الف) $$\begin{cases} x_1-x_2+(k-1)x_3=0 \\ 2x_1+kx_2-4x_3=0 \\ (k+2)x_2-8x_3=0 \end{cases}$$

ب) $$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+2x_2-2x_3=k-3 \\ 3x_1+kx_2=3 \end{cases}$$

۳) اگر T تبدیل خطی با ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد

الف) پایه‌ای برای برد و هسته T بیابید.

ب) دستگاهی بنویسید که فضای تولید شده توسط ستون‌های A (که به آن فضای ستونی A می‌گویند)، فضای جواب آن باشد.

ج) اگر W فضای تولید شده توسط سطرهای A باشد، (که به آن فضای سطری A می‌گویند) W را محاسبه کنید و نشان دهید $\ker(T) = W^{\perp}$.

۴) اگر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تبدیل خطی باشد و $f(x) = (f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_m(x))$ آنگاه نشان دهید نمودار یعنی مجموعه زیر یک زیرفضای برداری nـ بعدی از $\mathbb{R}^{n+m}$ است.

$$diag(f) = \{(x_۱, \cdots, x_n, f_۱(x), \cdots, f_m(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

۵) تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ مفروض است. برای هر $E \subset \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$T(E) = \{T(e) \mid e \in E\}$$

الف) نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه T پوشا باشد این است که اگر $E \subset \mathbb{R}^n$ مولد دلخواهی برای $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $T(E)$ مولدی برای $\mathbb{R}^m$ باشد.

ب) نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه T یک به یک باشد این است که اگر E مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $T(E)$ در $\mathbb{R}^m$ مستقل خطی باشد.

ج) نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه T یک به یک و پوشا باشد، این است که هر پایه برای $\mathbb{R}^n$ را به پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ تصویر کند.

٦) تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ با ماتریس A مفروض است. اگر $B = \{e_۱, \cdots, e_n\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ باشد نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه $T(B)$ پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ باشد این است که $A^{-۱} = A^T$. (در این صورت T را تبدیل متعامد می نامند.)

۷) فرض کنید $T : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ تبدیل خطی باشد که همه نقاط دو خط متمایز گذرنده از مبدأ را با زاویه α حول مبدأ دوران می‌دهد. ضابطهٔ T را به‌دست آورید.

۸) فرض کنید M زیرمجموعه‌ای ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه M زیرفضای آفین باشد، این است که برای هر $u, v, w \in M$ و هر $r \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $ru - rv + w \in M$.

۹) تبدیل خطی T با ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ مفروض است. تصویر هر یک از زیرفضاهای داده شده را تحت T بیابید.

الف) $\frac{x}{۱}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z}{-۱}$.

ب) $x+۲y-z=۳$.

ج) $x-y+z=۲$.

۱۰) اگر تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^{۲n}\longrightarrow\mathbb{R}^{۲n}$ چنان باشد که $T\circ T=۰$ نشان دهید $\dim(\ker(T))\geq n$.

۱۱) اگر A,B ماتریس‌های $n\times n$ باشند که $AB=۰$، ثابت کنید ماتریس مربعی C موجود است که $CA=۰$.

۱۲) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد، این است که ستون‌های A مستقل خطی باشند.

۱۳) اگر T تبدیلی متعامد و u,v دو بردار دلخواه در $\mathbb{R}^n$ باشند نشان دهید

الف) T حافظ طول است یعنی $|T(u)|=|u|$.

ب) T حافظ زاویه است یعنی اگر α زاویه بین u,v باشد، زاویه بین $T(u)$ و $T(v)$ نیز برابر α است.

۱۴) الف) اگر A ماتریس مربعی باشد، ثابت کنید $det(A)=\det(A^T)$.

ب) اگر T تبدیلی متعامد با ماتریس A باشد، مطلوب است $\det(A)$.

ج) اگر $T:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}^۲$ تبدیلی متعامد باشد، ثابت کنید T دوران حول مبدأ یا تقارن نسبت به یک خط راست گذرنده از مبدأ است.

۱۵) اگر $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ و $g:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^p$ تبدیل‌های خطی باشند ثابت کنید

$$\text{رتبه}\ (f\circ g)\leq \text{رتبه}\ (f)$$

۱۶) اگر f, g تبدیل‌های خطی با ماتریس‌های A, A^T باشند ثابت کنید

$$\text{رتبه}\ (g \circ f) = \text{رتبه}\ (f)$$

۱۷) اگر A, B به ترتیب ماتریس‌های $m \times n$ و $n \times m$ باشند که $m > n$، ثابت کنید $\det(AB) = 0$.

۱۸) اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد و برای یک $b \in \mathbb{R}^n$ دستگاه $AX = b$ دارای جواب منحصر به فرد باشد، ثابت کنید برای هر $b \in \mathbb{R}^n$ دستگاه $AX = b$ جواب منحصر به فرد دارد.

۱۹) فرض کنید T_θ تابعی باشد که به هر بردار $u \in \mathbb{R}^3$، برداری چون $T_\theta(u)$ را نسبت می‌دهد که از دوران u به اندازه θ حول محور z ها به‌دست می‌آید (و در طی دوران نقطهٔ انتهایی u در صفحه‌ای عمود بر محور z ها باقی می‌ماند). T_θ را بیابید و نشان دهید تبدیلی خطی است.

۲۰) تابع $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ مثال بزنید که برای هر $u \in M$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $T(ru) = rT(u)$، اما T خطی نباشد.

۲۱) اگر p و l به ترتیب یک نقطه و یک خط در $\mathbb{R}^n$ باشند، ثابت کنید حداقل فاصله p از نقاط l فاصله p از نقطه تقاطع ابرصفحه گذرنده از p و عمود بر l است.

۲۲) فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی باشد که هر نقطه را به تصویر قائم آن روی زیرفضای تولید شده توسط k عضو دلخواه از پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ نسبت می‌دهد. $(0 < k < n)$.

الف) ضابطه T را به‌دست آورید و نشان دهید تبدیلی خطی است.

ب) پایه‌ای برای برد و هسته T بیابید.