تمرین درس ریاضی عمومی I   نیمسال اول ۸۱—۸۰   گروه‌های (۲۴—۱۷)   مدرس: دکتر تابش

۱) فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ ناتهی باشد، مکمل S را به صورت $S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp y, \forall y \in S\}$ تعریف می‌کنیم

الف) نشان دهید $S^\perp$ زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است.

ب) اگر S فضای‌برداری با پایه $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ باشد، ثابت کنید $x \in S^\perp$ اگر و تنها اگر برای هر $1 \leq i \leq k$، x بر α_i عمود باشد.

ج) اگر S صفحه $x + 3y - z = 2$ باشد، $S^\perp$ را بیابید.

د) اگر S خط $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ باشد، مطلوب است $S^\perp$.

۲) اگر W_1 و W_2 دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند، تعریف کنید

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

الف) ثابت کنید $W_1 + W_2$ زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است.

ب) نشان دهید $W_1 + W_2$ فضای تولید شده توسط $W_1 \cup W_2$ است.

ج) اگر W_1 محور x ها و W_2 صفحه $x + 2y - z = 0$ باشد، مطلوب است $W_1 + W_2$.

د) اگر W_1 محور x ها و W_2 خط $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ باشد، مطلوب است $W_1 + W_2$.

ه) اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ثابت کنید هر $x \in W_1 + W_2$ را می توان به طور منحصر فرد به صورت مجموعی از یک بردار در W_1 و یک بردار در W_2 نوشت.

۳) اگر W_1, W_2 دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند، نشان دهید

الف) $\dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \leq n$

ب) $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

۴) اگر $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند

الف) ثابت کنید $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ مستقل خطی‌اند.

ب) ثابت کنید $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \ldots, \alpha_1 - \alpha_k$ مستقل خطی‌اند.

۵) فرض کنید $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$. نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه این بردارها مستقل باشند این است که $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \notin S(\alpha_1), \ldots, \alpha_k \notin S(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$.

۶) اگر مجموعه $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ باشد و $\alpha \in \mathbb{R}^n$ برداری دلخواه باشد، شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعه $\{\alpha_1 - \alpha, \ldots, \alpha_n - \alpha\}$ پایه $\mathbb{R}^n$ باشد، را بیابید.

۷) اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ در $\mathbb{R}^n$ مستقل باشند، تحت چه شرایطی مجموعه زیر در $\mathbb{R}^n$ مستقل است.

$$\{-\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} - \alpha_k\}$$

۸) اگر برای بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\begin{cases} \beta_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \\ \beta_2 = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 \end{cases}$ که در آن $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ثابت کنید $s(\alpha_1, \alpha_2) = s(\beta_1, \beta_2)$.

۹) ثابت کنید $\mathbb{R}^n$ را نمی‌توان به صورت اجتماعی متناهی از زیرفضاهایش نوشت.

۱۰) فرض کنید $v_k = \sum_{i=1}^{k} e_i$ که $e_i \in \mathbb{R}^n$

الف) ثابت کنید $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ است.

ب) پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ با استفاده از پایه بالا بیابید.

۱۱) با استفاده از بردارهای داده شده یک پایه متعامد یکه بسازید.

الف) $\alpha_1 = (2, 1, -1), \alpha_2 = (1, 0, -1), \alpha_3 = (0, 2, 1)$.

ب) $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1), \alpha_2 = (-1, 0, 2, 1), \alpha_3 = (0, 1, 2, 0), \alpha_4 = (0, 0, -1, 1)$.

۱۲) تصویر نقطه p را بر فضای W داده شده در هر قسمت بیابید.

الف) $p=(1,0,-1)$ بر صفحه $x+y-z=0$.

ب) $p=(0,0,1,1)$ بر صفحه $x_1+x_2-2x_3+x_4=0$.

۱۳) اگر W زیرفضای $\mathbb{R}^n$ با پایه $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ باشد و p نقطه‌ای خارج W باشد، ثابت کنید تصویر p بر W نزدیکترین نقطه W به نقطه p است.

۱۴) الف) نشان دهید دو دایره $c_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2=1\}$ و $c_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2=2\}$ را در $\mathbb{R}^2$ بدون اینکه یکدیگر را قطع کنند، نمی‌توان از هم جدا کرد، اما در $\mathbb{R}^3$ این کار امکان دارد.

ب) دو دایره

$$c_1=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=0,(x_2-1)^2+x_3^2=1\}$$
$$c_2=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2=1,x_3=0\}$$

در $\mathbb{R}^3$ به هم زنجیر شده‌اند و بدون آنکه همدیگر را قطع کنند نمی‌توان آنها را از هم جدا کرد. نشان دهید چگونه در $\mathbb{R}^4$ می‌توان آنها را از هم جدا کرد؟