**تمرین درس ریاضی عمومی I نیمسال اول ۸۱–۸۰ گروه‌های (۲۴–۱۷) مدرس: دکتر تابش**

۱) زاویه بین قطر یک مکعب و قطر یکی از وجه‌های آن را به‌دست آورید. تمامی جواب‌های ممکن را بیابید.

۲) اگر بردار $u$ در فضای $\mathbb{R}^3$ زوایای $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ را با محورهای مختصات بسازد، نشان دهید $e_u = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$ که $e_u$ بردار یکه در راستای $u$ است. سپس نشان دهید $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

۳) اگر $a$ یک بردار ناصفر و $w$ یک بردار دلخواه باشد، بردارهای $v$ و $u$ را طوری پیدا کنید که $w = u + v$ و $u$ موازی با $a$ و $v$ عمود بر $a$ باشد.

۴) فرض کنید $u$ و $v$ و $r$ بردارهای مکان نقاط $U$، $V$ و $P$ باشند که $u$ با $v$ موازی نباشد و $P$ در صفحه شامل مبدأ، $U$ و $V$ واقع باشد. نشان دهید که اعداد $\lambda_1, \lambda_2$ وجود دارند که $r = \lambda_1 u + \lambda_2 v$.

۵) با در نظر گرفتن اعداد ثابت $r, s, t$ و با شرط آنکه $r, s \neq 0$ و بردار ثابت $a \in \mathbb{R}^3$ که $|a|^2 > 4rst$، دستگاه معادلات $\begin{cases} rx + sy = a \\ x \cdot y = t \end{cases}$ را برای بردارهای نامعلوم $x, y$ حل کنید.

۶) اگر $w \in \mathbb{R}^3$ و $v$ و $u$ ثابت کنید:

الف) $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$.

ب) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

ج) $u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v)$.

د) اگر $u + v + w = 0$، آنگاه نشان دهید $u \times w = v \times w = w \times u$.

۷) اگر $u \cdot (v \times w) \neq 0$ و $x$ یک بردار اختیاری در $\mathbb{R}^3$ باشد، اعداد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ را چنان پیدا کنید که $x = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$.

۸) اگر $u \cdot (v \times w) = 0$ و $v \times w \neq 0$، آنگاه نشان دهید اعداد $\lambda_1$ و $\lambda_2$ ثابت وجود دارند که $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$.

۹) بردارهای $a$ و $b$ چه شرطی باید داشته باشند تا معادله $a \times x = b$ جواب داشته باشد؟ آیا جواب یکتاست؟

۱۰) تحت چه شرط هندسی، سه نقطه متمایز در فضای $\mathbb{R}^۳$ یک صفحه یکتای گذرا از هر سه نقطه را مشخص نمی‌کنند؟ این شرط را برحسب بردارهای مکان سه نقطه بیان کنید.

۱۱) شرطی برای بردارهای مکان چهار نقطه ارائه کنید، که تضمین کند چهار نقطه هم صفحه باشند.

۱۲) تحت چه شرطی روی بردارهای مکان چهار نقطه $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$، خط گذرا از $p_۱$ و $p_۲$ خط گذرا از $p_۳$ و $p_۴$ را دریک نقطه قطع می‌کند.

۱۳) فاصله بین دو خط زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = ٦ \\ x - ۲z = -۵ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x + ۲y = ۳ \\ y + z = ۳ \end{cases}$$

۱۴) اگر $u$ و $v$ و $w \in \mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

الف) $|u+v|^۲ + |u-v|^۲ = ۲(|u|^۲ + |v|^۲)$.

ب) $|u+v|^۲ + |u+w|^۲ + |v+w|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲ + |w|^۲ + |u+v+w|^۲$.

ج) $|u+v| + |u+w| + |v+w| \leq |u| + |v| + |w| + |u+v+w|$.