تمرین درس ریاضی عمومی I نیمسال اول ۸۱–۸۰ گروه‌های (۱–۸) مدرس: دکتر شهشهانی

۱) فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است، E و E' دو زیرفضای مستوی در $\mathbb{R}^n$ که موازی هستند (نه لزوماً همبعد). نشان دهید $f(E)$ و $f(E')$ موازی هستند (یا یکی زیرمجموعه‌ای از دیگری است).

۲) فرض کنید M زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. ثابت کنید M یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد. برای هر سه عنصر $u, v, w \in M$ و هر $r \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $ru - rv + w \in M$.

۳) نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ داده شده است. تصویر خط و صفحهٔ زیر را تحت اثر f پیدا کنید: $\frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z-۳}{-۱}$، $x + ۲y - ۲z - ۴ = ۰$.

۴) برای تابع‌های خطی که به وسیلهٔ هر یک ماتریس‌های زیر داده شده‌اند تحقیق کنید تابع یک به یک یا پوشا هست یا نیست. در هر مورد هستهٔ تابع و بعد تصویر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ح) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & & & O \\ & ۰ & ۱ & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & ۰ & ۱ \\ O & & & & ۰ \end{bmatrix}$

۵) تابع خطی $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ با ماتریس $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ داده شده است که در آن a و b اعداد حقیقی ثابت هستند و $a^۲ + b^۲ \neq ۰$. نشان دهید اگر دو خط $l_۱, l_۲$ در صفحه با یکدیگر زاویهٔ α بسازند، آنگاه $f(l_۱)$ و $f(l_۲)$ نیز دو خط هستند که با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند.

٦) اگر $E_۱, E_۲$ دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند که $E_۱ \cup E_۲$ نیز یک زیرفضای خطی است، نشان دهید $E_۱ \subset E_۲$ یا $E_۲ \subset E_۱$.

۷) فرض کنید تابع خطی $f : \mathbb{R}^{۲n} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲n}$ چنان باشد که $f \circ f$ تابع ثابت صفر است. نشان دهید بعد هسته f بزرگتر یا مساوی n است.

۸) فرض کنید برای ماتریس $n \times n$، A، ماتریسی $n \times n$، B، وجود داشته باشد که $A \cdot B = ۰$. نشان دهید ماتریسی $n \times n$، C، وجود دارد که $CA = ۰$. (راهنمایی. ماتریس‌ها را به صورت تابع خطی تلقی کنید.)