تمرین درس ریاضی عمومی I   نیمسال اول ۸۱–۸۰   گروه‌های (۱۶–۹)   مدرس: دکتر نجفی

۱) ثابت کنید اگر بعد فضای برداری V، n باشد و مجموعه $\{v_1, \ldots, v_k\}$، V را تولید کند آنگاه $k \geq n$.

۲) ثابت کنید اگر E یک زیرفضای مستوی از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\dim(E) \leq n$ و تساوی در حالتی اتفاق می‌افتد که $E = \mathbb{R}^n$.

۳) فرض کنید $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تبدیل خطی باشد. نشان دهید T یک به یک است اگر تصویر هر مجموعه پایه، یک مجموعه پایه باشد.

۴) ماتریس وابسته به توابع خطی زیر را پیدا کنید

الف) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$، T روی صفحه xy به صورت تجانس با ضریب ۲ و روی محور z به صورت تجانس با ضریب $\frac{1}{2}$ عمل می‌کند.

ب) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$، T روی صفحه xz دوران با زاویه $\frac{\pi}{4}$ و روی محور y تجانس با ضریب $\frac{1}{2}$ است.

۵) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت شکل مقابل تعریف شده است، نشان دهید T خطی است و ماتریس آن را حساب کنید. (تابع انعکاس نسبت به خط L)

٦) فرض کنید $0 < k < n$ اعداد صحیح و $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی خطی باشد به طوری که هر عنصر $\mathbb{R}^n$ را به تصویر قائم آن نقطه روی زیرفضای خطی تولید شده توسط $x_1, \ldots, x_n$ نسبت می‌دهد. نشان دهید T خطی است و ماتریس آن را به‌دست آورید.

۷) برای توابع خطی با ماتریس‌های زیر هسته و بعد تصویر را تعیین کنید:

(الف) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۸) تصویر خط و صفحه زیر را تحت تابع خطی که ماتریس آن $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ است، پیدا کنید:

$$L : \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z-۳}{۱} \quad , \quad P : x + ۲y - ۲z - ۴ = ۰$$

۹) فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ هستند به طوری که $AB = \underline{۰}$. ثابت کنید ماتریس $n \times n$، C وجود دارد که $CA = \underline{۰}$.

۱۰) دستگاه n معادلهٔ m مجهولی $Ax = b$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید:

الف) اگر $n > m$، آنگاه $b = (b-۱, \ldots, b_n)$ وجود دارد که معادله فاقد جواب است.

ب) اگر به‌ازای یک $b \in \mathbb{R}^n$ جواب منحصر به فرد داشته باشد، به‌ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ جواب منحصر به فرد موجود است.

ج) اگر به‌ازای یک b، دستگاه بیش از یک جواب داشته باشد، به‌ازای هر b دیگر که جواب داشته باشد، بیش از یک جواب دارد.

د) اگر به‌ازای بیش از یک b دستگاه جواب داشته باشد، به‌ازای بی‌نهایت b دستگاه جواب دارد.